МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Кафедра информационных технологий,
электроэнергетики и систем управления

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по выполнению расчетно-графических работ №1 по дисциплине «Математика»

Направление подготовки	**21.03.01 «Нефтегазовое дело»** (код и наименование направления подготовки)
Направленность (профиль) подготовки	**«Эксплуатация и обслуживание объектов транспорта и хранения нефти, газа и продуктов переработки»** (наименование профиля подготовки)
Квалификация выпускника	**бакалавр**
Форма обучения	**очная, очно-заочная**

Чебоксары, 2022

Методические указания разработаны
в соответствии с требованиями
ФГОС ВО по направлению подготовки

__________**21.03.01 «Нефтегазовое дело»**________________________________

Авторы:

Кульпина Татьяна Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий, электроэнергетики и систем управления

ФИО, ученая степень, ученое звание или должность, наименование кафедры

Методические указания одобрены на заседании кафедры

____

наименование кафедры

протокол № 10 от 14.05.2022 года.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и организация выполнения расчетно-графической работы

В соответствии с учебным планом по направлению подготовки **21.03.01 «Нефтегазовое дело»** обучающиеся в процессе изучения дисциплины «Математика» выполняют расчетно-графическую работу№1.

Цель расчетно-графической работы - выявить знания студентов методологических основ математики, умение применять эти знания в анализе социально-экономических явлений, производить расчеты, привить обучающимся навыки самостоятельной работы с применением математических методов.

В ходе выполнения расчетно-графической работы обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных, уметь вычислять пределы, находить производные, находить интегралы. Расчетно-графическая работа должна быть выполнена и представлена в срок, установленный графиком учебного процесса.

Выполнение расчетно-графической работы включает следующие этапы:

- ознакомление с программой дисциплины «Математика», методическими рекомендациями по выполнению расчетно-графической работы;
- проработка соответствующих разделов методологии математики по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций;
- выполнение расчетов с применением освоенных методов;

Завершенная работа представляется для проверки на кафедру преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Срок проверки не более 5-7 дней. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие расчетно-графическую работу, к экзамену не допускаются.

2. Выбор варианта и структура расчетно-графической работы

Задания для расчетно-графических работ составляются преподавателем, который ведет данную дисциплину, и утверждаются кафедрой.

Номер варианта расчетно-графической работы выбирается обучающимся по последней цифре в шифре номера зачетной книжки. Так, например, если последняя цифра шифра 1, то обучающийся выполняет расчетно-графическую работу по варианту № 1.

При выполнении расчетно-графической работы необходимо придерживаться следующей структуры:

- титульный лист;
- введение;
- расчетная часть;
- заключение;
- список использованной литературы.

Титульный лист является первой страницей расчетно-графической работы. Образец его оформления приведен в Приложении 1.

Во введении содержатся общие сведения о выполненной работе (0,5-1 с.).

В расчетной части обучающийся должен показать умение применять математические методы расчетов, рассчитывать необходимые данные, делать на их основе аргументированные выводы.

Условия задач в расчетной части должны быть приведены полностью. Решение задач следует сопровождать развернутыми расчетами, ссылками на математические формулы, анализом и выводами. Задачи, в которых даны только ответы без промежуточных вычислений, считаются нерешенными.

Все расчеты относительных показателей нужно производить с принятой в математике точностью вычислений: коэффициенты - до 0,001, а проценты - до 0,1.

Следует обратить особое внимание на выводы, которые должны быть обоснованными, подтверждаться предварительным анализом цифрового материала.

В заключении расчетно-графической работы (1 с.) в краткой форме резюмируются результаты работы.

После заключения приводится список литературы, включающий только те источники, которые были использованы при выполнении расчетно-графической работы и на которые имеются ссылки в тексте работы.

При описании литературных источников необходимо указать:

- фамилии и инициалы авторов;
- название книги, сборника, статьи;
- место издания;
- издательство;
- год издания;
- количество страниц или конкретные страницы (последние в случае ссылки на статью или статистический сборник).

Стандартный формат описания источников приведен в списке литературы.

3. Требования к оформлению расчетно-графической работы

При оформлении расчетно-графической работы необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. Объем работы - 10-15 страниц текста на стандартных листах формата А4, набранных на компьютере с использованием текстового редактора или вручную (письменно), табличного процессора или других программных средств (размер шрифта - 14 пунктов, интервал - 1,5).
2. Страницы должны быть пронумерованы и иметь поля слева и справа не менее 25 мм для замечаний преподавателя-консультанта.
3. В тексте не должно быть сокращений слов, кроме общепринятых.
4. Все промежуточные данные проводимых расчетов и результаты следует представлять в явном виде.

5. Все таблицы должны иметь сквозную нумерацию. Приведенные в работе иллюстрации (графики, диаграммы) должны иметь подрисуночные подписи.

6. Описание литературных источников выполняется в соответствии со стандартными требованиями, приведенными в предыдущем разделе.

4. Теоретический материал и примеры решения задач

Матрицы и операции над ними

Сложение (вычитание) матриц одинакового размера производится поэлементно.

$$C = A + B,\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Умножение матрицы на число – каждый элемент матрицы умножается на это число.

$$A = \lambda B, a_{ij} = \lambda b_{ij}.$$

Умножение матрицы на матрицу определено, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Замена каждой строки матрицы ее столбцом с сохранением порядка называется *транспонированием.* Транспонированная по отношению к матрице A матрица обозначается A^t.

Пример. Найти матрицу $C = 2A + B^t$, где

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 6 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение. $C=2A+B^t=2\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 2 & 0\\ -6 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 6\\ -3 & 1\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 12\\ -1 & 1\\ -6 & 7\end{pmatrix}.$

Пример. Найти произведение матриц

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot1+3\cdot2 & -2\cdot(-3)+3\cdot4\\ 1\cdot1+0\cdot2 & 1\cdot(-3)+0\cdot4\\ -3\cdot1+1\cdot2 & -3\cdot(-3)+1\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 1 & -3\\ -1 & -5\end{pmatrix}.$$

Определители

Каждой квадратной матрице можно поставит в соответствие число, называемое *определителем.*

Определитель матрицы *второго порядка* вычисляется по формуле

$$|A|=\Delta_2=\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Определитель матрицы *третьего порядка* вычисляется по *правилу треугольников* или *Саррюса*

$$|A| = \Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Определитель матрицы *второго порядка* вычисляется более сложно. Можно применить теорему Лапласа.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$|A| = \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Определитель треугольной (диагональной) матрицы равен произведению диагональных элементов.

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$: а) по правилу треугольников; б) с помощью алгебраических дополнений.

Решение. а)
$$\Delta = 3\cdot 1\cdot 4 + (-1)\cdot(-3)\cdot(-2) + (-1)\cdot 5\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 5\cdot(-2) - (-1)\cdot(-3)\cdot 4 =$$
$$= 12 - 6 - 10 + 2 + 30 - 12 = 16.$$

б) Найдем алгебраические дополнения 3-й строки.

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 5 - (-1)\cdot 1 = -4,\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -(3\cdot 5 - (-1)\cdot(-3)) = -12,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - (-1)\cdot(-3) = 0.$$

Тогда по теореме Лапласа

$$|A| = \det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 2\cdot(-4) + (-2)\cdot(-12) + 4\cdot 0 = 16.$$

Ранг матрицы

Обратная матрица

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Обратной матрицей A^{-1} для матрицы A называется матрица, для которой справедливо равенство $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$, где E - единичная матрица.

Обратная матрица A^{-1} определена только для квадратных невырожденных матриц и может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^{t}.$$

Теорема о ранге матрицы. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно-независимых строк или столбцов.

Пример. Найти матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1 способ. Находим определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$ Значит матрица имеет обратную.

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\5&2&4&0&1&0\\7&3&4&0&0&1\end{array}\right)$$

Прибавим к элементам 2-й строки, умноженной на 2, элементы 1-й строки, умноженной на -5, а к элементам 3-й строки, умноженным на 2, элементы 1-й строки, умноженные на -7. Получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\0&-1&13&-5&2&0\\0&-1&15&-7&0&2\end{array}\right)$$

К элементам 3-й строки прибавим элементы 2-й строки, умноженные на -1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\0&-1&13&-5&2&0\\0&0&2&-2&-2&2\end{array}\right)$$

К 1-й строке, умноженной на 2, прибавим 3-ю, а к 2-й, умноженной на 2, 3-ю строку, умноженную на -13.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&2&0&0&-2&2\\0&-2&0&16&30&-26\\0&0&2&-2&-2&2\end{array}\right)$$

Сложим элементы 1-й и 2-й строк.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}4&0&0&16&28&-24\\0&-2&0&16&30&-26\\0&0&2&-2&-2&2\end{array}\right)$$

Поделив 1-ю строку на 4, 2-ю – на -2, 3-ю – на 2, справа от черты получим матрицу обратную для исходной.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверяем правильность вычислений по формуле

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E \,.$$

2 способ. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4,\; A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 8,\; A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7,\; A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 15,\; A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6,\; A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -13,\; A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

Подставим найденные значения дополнений и определителя в формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A_{ij}\right)^t .$$

Получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -6 \\ -8 & -15 & 13 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Системы линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} -коэффициенты при неизвестных, b_m - свободные члены.

Основными методами решения СЛАУ являются метод Гаусса, матричный метод и правило Крамера. Метод Гаусса применим для решения любой СЛАУ, в то время как метод Крамера и матричный метод могут быть использованы только для решения систем с квадратной невырожденной матрицей.

Для решения *методом Гаусса* составляют расширенную матрицу системы, которую затем с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду. По полученной матрице выписывают новую систему и решают ее методом исключения переменных.

Решение системы *матричным методом* или *методом обратной матрицы* определяется по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

По формулам Крамера :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где Δ - определитель системы, Δ_j - определители, полученные из определителя системы заменой j-го столбца на столбец свободных членов.

Пример. Решить СЛАУ: а) матричным методом; б) методом Крамера; в) методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. а) Матрица системы имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - столбец неизвестных, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ - столбец свободных членов.

Определитель системы $\Delta=-7\neq 0$. Обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

По формуле

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & -4 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=1$.

б) Вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-7,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-7,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-7.$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1.$$

в) Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Приведем ее к ступенчатому виду. Для этого прибавим к элементам 2-й строки элементы 1-й строки, умноженные на -2, а к элементам 3-й строки – элементы 1-й строки, умноженные на 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 5 & 4 & 9 \end{array}\right)$$

Прибавим к 3-й строке, умноженной на 3, 2-ю строку, умноженную на 5.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

Расширенная матрица приведена к ступенчатому виду. Соответствующая ей система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ -3x_2 - x_3 = -4, \\ 7x_3 = 7. \end{cases}$$

Из последнего уравнения найдем $x_3 = \frac{7}{7} = 1$, из второго уравнения $x_2 = \frac{4 - x_3}{3} = \frac{4-1}{3} = 1$, и из первого $x_1 = 3 - x_2 - x_3 = 3 - 1 - 1 = 1$.

Векторная алгебра

Операции над векторами

Скалярное произведение векторов

Вектором называют направленный отрезок, который можно перемещать параллельно самому себе.

Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ называются *линейно-независимыми*, если $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. В противном случае, они линейно-зависимы.

Длиной (модулем) вектора называется длина отрезка, изображающего вектор. Длина $\vec{a}(x, y)$ определяется по формуле $\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Векторы называются *коллинеарными,* если лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы называются *компланарными*, если лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями с векторами являются:

1) сложение: $\vec{a} + \vec{b} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;

2) умножение на число $\lambda\vec{a} = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Углы наклона $\vec{a}$ к осям координат называются *направляющими косинусами.*

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

причем

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется число

$$\text{ïð}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi,$$

где φ - угол наклона вектора $\vec{a}$ к оси l.

Скалярным произведением $\vec{a}, \vec{b}$ называется число

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

В координатной форме

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 .$$

Угол между векторами $\vec{a}, \vec{b}$ определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} .$$

Пример. Найти длину $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ и разложить его по $\vec{a}, \vec{b}$, если

$$\vec{a} = (3,-1), \vec{b} = (1,-2), \vec{c} = (-1, 1) .$$

Решение. Найдем координаты $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (3,-1) + (1,-2) + (-1, 1) = (3,-2)$.

Длина вектора $\vec{d} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

Разложить по $\vec{a}, \vec{b}$- значит, представить в виде $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$. Для определения α, β, запишем в виде

$$\alpha \cdot (3,-1) + \beta \cdot (1,-2) = (3,-2)$$

или

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3, \\ -\alpha - 2\beta = -2. \end{cases}$$

Решив систему, получим $\alpha = \frac{4}{5} \beta = \frac{3}{5}$, то есть $\vec{d} = \frac{4}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3, \varphi = \frac{\pi}{3}$

.

Решение. $\cos\varphi = \frac{(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2} \cdot \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{b}|^2}} =$

$$=\frac{4^2-3^2}{\sqrt{4^2+2\cdot4\cdot3\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+3^2}\cdot\sqrt{4^2-2\cdot4\cdot3\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}+3^2}}=\frac{7}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{13}}.$$

Векторное и смешанное произведения векторов

Векторным произведением $\vec{a},\vec{b}$ называется число

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\varphi.$$

В координатной форме

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна модулю их векторного произведения.

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна половине модуля их векторного произведения.

Смешанным произведением $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объем параллелепипеда, построенного на $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, равен модулю их смешанного произведения.

Пример. Найти вектор $\vec{d}$, ортогональный $\vec{a}=(1,2,3),\vec{b}=(-7,0,2)$, для которого скалярное произведение с $\vec{c}=(1,1,1)$ равно 3.

Решение. Искомый вектор коллинеарен $\vec{a}\times\vec{b}$. Следовательно, он равен $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(4,-23,14).$$

Тогда $\vec{d}=(4\lambda,-23\lambda,14\lambda)$.

$$\vec{d}\cdot\vec{c}=4\lambda\cdot 1-23\lambda\cdot 1+14\lambda\cdot 1=-5\lambda=3,\ \lambda=-\frac{3}{5}\Rightarrow\vec{d}=\left(-\frac{12}{5},\frac{69}{5},-\frac{42}{5}\right).$$

5. Задания расчётно-графической работы №1.

Задание1. Даны матрицы *A* и *B*. Найдите матрицу *C*.

1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ C=2A+3B$.

2. $A=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix},\ C=3B-2A$.

3. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix},\ C=3A-B$.

4. $A=\begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 7 & -3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix},\ C=A+2B$.

5. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},\ C=2B-A^t$.

6. $A=\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=(2A)^t+B$.

7. $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & 8\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ -7 & 1 & -2\end{pmatrix}$, $C=A+2B^t$.

8. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 5 & -7\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 0 & 2\\ 1 & -8\end{pmatrix}$, $C=2A^t-B^t$.

9. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & -11\\ -1 & 2 & -2\\ 3 & 1 & 17\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 18\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=(12A)^t-B$.

10. $A=\begin{pmatrix}2 & -16\\ 6 & -3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 10 & 2\\ 1 & -8\end{pmatrix}$, $C=A+15B$

<u>Задание2.</u> Найдите произведение матриц $A\cdot B$ или значение матричного многочлена. Существует ли произведение $B\cdot A$?

1. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix}-4 & 34 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2\\ 14\\ 3\end{pmatrix}$.

6. $f(x)=2x^2-5x+3,$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

7. $f(x)=3x^2+2x-5,$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

8. $f(x)=x^3-7x^2+3,$

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -3\\ 2 & 0 & -4\\ 0 & 3 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}.$$

9. $f(x)=12x^2+5x+3,$

$$A=\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -10 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}37 & -11\\ 12 & 4\end{pmatrix}.$$

10. $A=\begin{pmatrix}9 & 0 & 1\\ 4 & 1 & -7\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 8 & -1 & 1\\ 1 & 9 & -1\end{pmatrix}.$

Задание3.Вычислить определитель.

1. $\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}.$

2. $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

Задание4. Найдите обратную матрицу для матрицы A. Сделайте проверку.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

9. $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & -8 \\ 20 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

10. $A = \begin{pmatrix} 13 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 19 \end{pmatrix}$.

<u>Задание5.</u> Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

-методом Гаусса

-по формулам Крамера

-средствами матричного исчисления

1. $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y + 4z = 3, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 3y - z = 4, \\ -x + 2y + 3z = 12, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x - y + z = -17, \\ x - 3y + 2z = -11, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x - y - z = -3, \\ x + 3y + 3z = -4, \\ -x + 2y - z = 5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x - y + z = -16, \\ 2x - 3y + 2z = -11, \\ 2x + y + z = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - y - z = -3, \\ x + 2y + 3z = -4, \\ -x + 2y - z = 1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+y+z=-1, \\ 6x-y+2z=-4, \\ 2x+y+4z=-1. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x+y+4z=1, \\ 2x+y-z=1, \\ x+2y+3z=5. \end{cases}$

Задание6. Найти линейную комбинацию векторов.

1. $3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{a}=(4,1,3), \vec{b}=(1,2,-2), \vec{c}=(10,8,1).$

2. $2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}$, где $\vec{a}=(1,2,0), \vec{b}=(2,1,1), \vec{c}=(-1,1,-2).$

3. $(\vec{a},\vec{b})\vec{c}+3(\vec{b},\vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(4,1,3), \vec{b}=(1,2,-2), \vec{c}=(10,8,1).$

4. $4\vec{a}+19\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{a}=(2,-4,3), \vec{b}=(10,-5,-2), \vec{c}=(187,8,1).$

5. $18\vec{a}+3\vec{b}+7\vec{c}$, где $\vec{a}=(-6,2,0), \vec{b}=(54,1,1), \vec{c}=(-90,1,-2).$

6. $(\vec{a},\vec{b})\vec{c}+13(\vec{b},\vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(45,-9,3), \vec{b}=(1,2,-2), \vec{c}=(131,9,1).$

7. $13\vec{a}+6\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{a}=(-10,1,9), \vec{b}=(1,7,-2), \vec{c}=(10,5,1).$

8. $-5\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}$, где $\vec{a}=(-7,2,0), \vec{b}=(-5,1,1), \vec{c}=(-1,1,-2).$

9. $2(\vec{a},\vec{b})\vec{c}+7(\vec{b},\vec{c})\vec{b}$, где $\vec{a}=(4,-8,3), \vec{b}=(90,2,-2), \vec{c}=(10,8,1).$

10. $14\vec{a}+19\vec{b}-\vec{c}$, где $\vec{a}=(-4,-4,3), \vec{b}=(113,-5,-2), \vec{c}=(17,3,1).$

Задание7. Найти скалярное произведение векторов и угол между ними.

1. $\vec{a}=(0,4,-3), \vec{b}=(-1,2,2).$

2. $\vec{a}=(2,1,-2), \vec{b}=(0,-2,-3).$

3. $\vec{a}=(4,1,3), \vec{b}=(1,2,-2)$.

4. $\vec{a}=(1,2,0), \vec{b}=(2,1,1)$.

5. $\vec{a}=(4,1,3), \vec{b}=(1,2,-2)$.

6. $\vec{a} = (1, 4, -7), \vec{b} = (-1, 2, 2).$

7. $\vec{a} = (10, 1, -5), \vec{b} = (3, -2, -3).$

8. $\vec{a} = (-14, 11, 3), \vec{b} = (3, 2, -2)$.

9. $\vec{a} = (13, 2, 0), \vec{b} = (24, 1, 1)$.

10. $\vec{a} = (51, 1, -3), \vec{b} = (1, 2, -2)$.

<u>Задание8.</u>

1. Даны точки $A(2, -1, 4), B(4, 0, 2)$. Найти модуль и направление вектора AB

2. Найти $\left|2\vec{a} + 3\vec{b}\right|$, если $\vec{a} = (1.5, 0, -4), \vec{b} = (0, 0, 4)$.

3. При каком значении n векторы $\vec{a} = (3, -2, 1)$ и $\vec{b} = (n, 4, 0.5)$ ортогональны?

4. Найти $(\vec{c}, \vec{d})$, если $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}, \vec{d} = 4\vec{a} - \vec{b}, |\vec{a}| = 2, \left|\vec{b}\right| = 3,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 120^o.

5. Вычислить $|\vec{c}|$, если $\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b}, |\vec{a}| = 3, \left|\vec{b}\right| = 4,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 60^o.

6. Вычислить $\left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}, \left|\vec{b}\right| = 4,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135^o.

7. Найти внешний угол B в треугольнике ABC, если $A(2, -1, 4), B(4, 0, 2), C(2, -3, 1).$

8. Найти угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 1, \left|\vec{b}\right| = 6,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 60^o.

9. Найти $\vec{c} = 2\vec{a}, \vec{d} = \vec{b} - \vec{a}, |\vec{c}|, |\vec{d}|, \vec{d}^{\,2}, (\vec{c}, \vec{d})$, угол между векторами $\vec{c}, \vec{d}$, если $\vec{a} = (2, -1, -2), \vec{b} = (8, -4, 0)$.

10. Построить параллелограмм на векторах $OA = (1,1,0), OB = (0,-3,1)$. Определить диагонали и их длины.

<u>Задание9.</u>

1. Вычислить $[\vec{c}, \vec{d}]$, если

$\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b},\ \vec{d} = -2\vec{a} + \vec{b},\ \vec{a} = (-1, 0, 3),\ \vec{b} = (1,1,2).$

2. Найти $\left|[\vec{c}, \vec{d}]\right|$, если $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b},\ \vec{d} = -\vec{a} + 3\vec{b},\ |\vec{a}| = |\vec{b}| = 2,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 30^o.

3. Вычислить площадь треугольника ABC, если $A(2,-2,3),\ B(-3,-6,0),\ C(4,-3,-1).$

4.Лежат ли точки $A(2,-1,-3),\ B(-4,1,-2),\ C(0,-6,3),\ D(-12,-2,5)$ в одной плоскости?

5. Лежат ли точки $A(1,-2,3),\ B(0,1,0),\ C(1,2,-1),\ D(4,-1,7)$ в одной плоскости?

6. Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = (2, -2, 6)$, $\vec{b} = (-6, 6, 3)$,

$\vec{n} = (3, -2, 5)$.

7. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP, площади граней тетраэдра, если $A(1,-3,-5),\ B(-1,2,-4),\ C(0,0,-2), D(-6,-1,-2)$.

8. Найти объем тетраэдра $ABCD$, высоту BP, медианы граней, площади граней тетраэдра, если $A(2,-1,2),\ B(5,5,5),\ C(3,2,0), D(4,1,4)$.

9. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, длины диагоналей параллелограмма, угол между $\vec{a}$ и $\vec{p}$, и проекцию $\vec{a}$ на $\vec{b}$.

10. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{c} = 6\vec{a} + 10\vec{b}, \vec{d} = 3\vec{a} - 6\vec{b}, \vec{f} = 3\vec{a} - 6\vec{b}, |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2,$ а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ 135^o.

Задание10.

1. Написать уравнения высоты, проведенной из вершины A, и медианы, проведенной из вершины B, треугольника ABC, если $A(-1,-5), B(3,-1), C(1,-2).$

2. Написать уравнение стороны квадрата $ABCD$, если заданы координаты двух его смежных вершин $A(1,-1), B(-3,3).$

3. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(8,6)$ и образует с координатными осями треугольник площадью 12.

4. Вычислить расстояние от точки $A(5,4)$ до прямой, проходящей через точки $B(1,-2), C(0,3).$

5. Написать уравнения прямых, проходящих через точку $A(1,4)$, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой $-2x + 5y - 2 = 0.$

6. Написать уравнение прямой, которая проходит через точку $A(-1,5)$ и точку пересечения прямых $5x + 3y - 1 = 0$ и $4x + 5y + 7 = 0.$

7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,1,2)$, перпендикулярно вектору AB, если $B(-1,2,3).$

8. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1,2,-3)$ параллельно плоскости, заданной уравнением $4x + y - 2z + 2 = 0.$

9. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,-1,3)$ и отсекающей на координатных осях равные отрезки.

10. Найти угол между плоскостями, заданными уравнениями $x-\sqrt{2}y+z-1=0$ и $x+\sqrt{2}y-z+3=0.$

6. Критерии оценки расчетно-графической работы и типовые ошибки при ее выполнении.

Шкала оценивания	Критерии оценивания
«Отлично»	обучающийся ясно изложил условия задач, решения обосновал
«Хорошо»	обучающийся ясно изложил условия задач, но в обосновании решений имеются сомнения;
«Удовлетворительно»	обучающийся изложил решение задач, но в решении есть ошибки;
«Неудовлетворительно»	обучающийся не уяснил условия задач, решения не обосновал, либо не сдал работу на проверку.

7. Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для вузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 401 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-07001-9. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/468633
2. Бугров, Я. С. Высшая математика. Задачник : учебное пособие для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва : Издательство Юрайт, 2021. – 192 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-9916-7568-0. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/489755 .
3. Лунгу К. Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Т. 1 [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Лунгу К.Н., Макаров Е.В., - 3-е изд. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2013. - 2016 с. - Режим доступа : http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=854317

4. Шипачев В. С. Высшая математика [Электронный ресурс] : учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с. - Режим доступа : http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=469720
5. Лунгу К. Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2 [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Лунгу К.Н., Макаров Е.В., - 2-е изд. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2015. - Режим доступа : http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=854393

Дополнительная литература

1. Математика : учебное пособие / Ю. М. Данилов, Л. Н. Журбенко, Г. А. Никонова [и др.] ; под ред. Л. Н. Журбенко, Г. А. Никоновой. – Москва : ИНФРА-М, 2019. – 496 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – ISBN 978-5-16-010118-7. – URL: https://znanium.com/catalog/product/989799. – Текст : электронный.
2. Клово, А. Г. Курс лекций по математике : учебное пособие / А. Г. Клово, И. А. Ляпунова ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону : Южный федеральный университет, 2020. – 199 с. : ил. – ISBN 978-5-9275-3503. –URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=612217. – Текст : электронный.

Периодика

Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки / гл. ред.Кревчик В.Д. — Пенза, 2021. — URL: https://e.lanbook.com/journal/issue/314991. — Текст : электронный

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для написания РГР

9. Профессиональная база данных и информационно-справочные системы	Информация о праве собственности (реквизиты договора)
Ассоциация инженерного образования России http://www.ac-raee.ru/	Совершенствование образования и инженерной деятельности во всех их проявлениях, относящихся к учебному, научному и технологическому направлениям, включая процессы преподавания, консультирования, исследования, разработки инженерных решений, включая нефтегазовую отрасль, трансфера технологий, оказания широкого спектра образовательных услуг, обеспечения связей с общественностью, производством, наукой и интеграции в международное научно-образовательное пространство.

9. Профессиональная база данных и информационно-справочные системы	Информация о праве собственности (реквизиты договора)
	свободный доступ
научная электронная библиотека Elibrary http://elibrary.ru/	Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU - это крупнейший российский информационно-аналитический портал в области науки, технологии, медицины и образования, содержащий рефераты и полные тексты более 26 млн научных статей и публикаций, в том числе электронные версии более 5600 российских научно-технических журналов, из которых более 4800 журналов в открытом доступе свободный доступ
Федеральный портал «Российское образование» [Электронный ресурс] – http://www.edu.ru	Федеральный портал «Российское образование» – уникальный интернет-ресурс в сфере образования и науки. Ежедневно публикует самые актуальные новости, анонсы событий, информационные материалы для широкого круга читателей. Еженедельно на портале размещаются эксклюзивные материалы, интервью с ведущими специалистами – педагогами, психологами, учеными, репортажи и аналитические статьи. Читатели получают доступ к нормативно-правовой базе сферы образования, они могут пользоваться самыми различными полезными сервисами – такими, как онлайн-тестирование, опросы по актуальным темам и т.д.

Название организации	**Сокращённое название**	**Организационно-правовая форма**	**Отрасль (область деятельности)**	**Официальный сайт**
РОССИЙСКИЙ СОЮЗ научных и инженерных общественных объединений	РосСНИО	неправительственное, независимое общественное объединение	творческий Союз общественных научных, научно-технических, инженерных, экономических	http://rusea.info

			объединений, являющихся юридическими лицами, созданный на основе общности творческих профессиональных интересов ученых, инженеров и специалистов для реализации общих целей и задач.	
Российский союз инженеров	РСИ	Общероссийская общественная организация «Российский союз инженеров» (далее именуемая «Союз») является основанным на членстве общественным объединением, созданным в форме общественной организации	Защита общих интересов и достижения уставных целей объединившихся граждан, осуществляющих свою деятельность на территории более половины субъектов Российской Федерации	http://российский-союз-инженеров.рф/

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ) МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Кафедра Информационных технологий, электроэнергетики и систем управления

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по дисциплине «МАТЕМАТИКА»

____

Наименование темы

Выполнил: студент __ курса
заочного отделения
по направлению 09.03.01
«Информатика и вычислительная техника»

____

Ф.И.О.

Научный руководитель:

____

должность, звание

____

Ф.И.О.

Оценка ______________________________

Дата «__» ________________ 2021г.

Чебоксары 2021