МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)

Кафедра менеджмента, экономики и права

УТВЕРЖДАЮ
Директор филиала
____________ А.В. Агафонов
«28» мая 2021 г.
М.П.

«ЭКОНОМЕТРИКА»
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Направление подготовки	**38.03.02 Экономика** (код и наименование направления подготовки)
Направленность подготовки	**Производственный менеджмент** ______(наименование профиля подготовки)_____
Квалификация выпускника	**бакалавр**
Форма обучения	**Очная и заочная**

Чебоксары, 2021

Одобрено кафедрой «Управления в технических системах и программирования». Протокол заседания кафедры № 9 от 10.04.2021г.

Для обучающихся Чебоксарского института (филиала) Московского политехнического университета по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика»

Составитель: к.п.н., доцент Тихонова Л. В.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цель и организация выполнения расчетно-графической работы

В соответствии с учебным планом по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика» обучающиеся в процессе изучения дисциплины «Эконометрика» выполняют расчетно-графическую работу.

Цель расчетно-графической работы - выявить знания студентов методологических основ математики, умение применять эти знания в анализе социально-экономических явлений, производить расчеты, привить обучающимся навыки самостоятельной работы с применением математических методов.

В ходе выполнения расчетно-графической работы обучающийся должен проявить умение самостоятельно работать с учебной и научной математической литературой, применять математическую методологию в анализе конкретных данных, уметь перемножать матрицы, находить определители, решать линейные алгебраические уравнения различными способами, владеть понятиями векторной алгебры.

Выполнение расчетно-графической работы по дисциплине «Эконометрика» способствует формированию следующей компетенции, предусмотренной Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика» (уровень бакалавриата), утвержденного Приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 12 ноября 2015г. № 1327, которыми должен обладать выпускник:

- **ОПК – 2 -** способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач
- **ОПК – 3 -** способность выбирать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, анализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы
- **ПК – 1 -** способность собирать и анализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов
- **ПК – 4 -** способность на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты.

Расчетно-графическая работа должна быть выполнена и представлена в срок, установленный графиком учебного процесса.

Выполнение расчетно-графической работы включает следующие этапы:

- ознакомление с программой дисциплины «Эконометрика», методическими рекомендациями по выполнению расчетно-графической работы;
- проработка соответствующих разделов методологии математики по рекомендованной учебной литературе, конспектам лекций;
- выполнение расчетов с применением освоенных методов;

Завершенная работа представляется для проверки на кафедру преподавателю в установленные учебным графиком сроки. Срок проверки не более 5-7 дней. Преподаватель проверяет качество работы, отмечает положительные стороны, недостатки работы и оценивает ее. Обучающиеся, не подготовившие расчетно-графическую работу, к экзамену не допускаются.

2. Выбор варианта и структура расчетно-графической работы

Задания для расчетно-графических работ составляются преподавателем, который ведет данную дисциплину, и утверждаются кафедрой.

Номер варианта расчетно-графической работы выбирается обучающимся по последней цифре в шифре номера зачетной книжки. Так, например, если последняя цифра шифра 1, то обучающийся выполняет расчетно-графическую работу по варианту № 1.

При выполнении расчетно-графической работы необходимо придерживаться следующей структуры:

- титульный лист;
- введение;
- расчетная часть;
- заключение;
- список использованной литературы.

Титульный лист является первой страницей расчетно-графической работы. Образец его оформления приведен в Приложении 1.

Во введении содержатся общие сведения о выполненной работе (0,5-1 с.).

В расчетной части обучающийся должен показать умение применять математические методы расчетов, рассчитывать необходимые данные, делать на их основе аргументированные выводы.

Условия задач в расчетной части должны быть приведены полностью. Решение задач следует сопровождать развернутыми расчетами, ссылками на математические формулы, анализом и выводами. Задачи, в которых даны только ответы без промежуточных вычислений, считаются нерешенными.

Все расчеты относительных показателей нужно производить с принятой в математике точностью вычислений: коэффициенты - до 0,001, а проценты - до 0,1.

Следует обратить особое внимание на выводы, которые должны быть обоснованными, подтверждаться предварительным анализом цифрового материала.

В заключении расчетно-графической работы (1 с.) в краткой форме резюмируются результаты работы.

После заключения приводится список литературы, включающий только те источники, которые были использованы при выполнении расчетно-графической работы и на которые имеются ссылки в тексте работы.

При описании литературных источников необходимо указать:

- фамилии и инициалы авторов;
- название книги, сборника, статьи;
- место издания;
- издательство;
- год издания;

- количество страниц или конкретные страницы (последние в случае ссылки на статью или статистический сборник).

Стандартный формат описания источников приведен в списке литературы.

3. Требования к оформлению расчетно-графической работы

При оформлении расчетно-графической работы необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. Объем работы - 10-15 страниц текста на стандартных листах формата А4, набранных на компьютере с использованием текстового редактора или вручную (письменно), табличного процессора или других программных средств (размер шрифта - 14 пунктов, интервал - 1,5).
2. Страницы должны быть пронумерованы и иметь поля слева и справа не менее 25 мм для замечаний преподавателя-консультанта.
3. В тексте не должно быть сокращений слов, кроме общепринятых.
4. Все промежуточные данные проводимых расчетов и результаты следует представлять в явном виде.
5. Все таблицы должны иметь сквозную нумерацию. Приведенные в работе иллюстрации (графики, диаграммы) должны иметь подрисуночные подписи.

Описание литературных источников выполняется в соответствии со стандартными требованиями, приведенными в предыдущем разделе

4. Задания расчётно-графической работы.

5. Теоретический материал и примеры решения задач

Пример выполнения контрольного задания № 1

Предположим, что первое задание некоторого нулевого варианта имеет следующий вид.

Некоторая фирма, производящая товар, хочет проверить, эффективность рекламы этого товара. Для этого в 10 регионах, до этого имеющих одинаковые средние количества продаж, стала проводиться разная рекламная политика и на рекламу начало выделяться x_i денежных средств. При этом фиксировалось число продаж y_i. Предполагая, что для данного случая количество продаж X пропорциональны расходам на рекламу Y, необходимо:

1. Вычислить точечные оценки для математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения показателей X и Y.
2. В соответствии с методом наименьших квадратов найти уравнение линейной регрессии $\tilde{y} = ax + b$.
3. Найти парный коэффициент линейной корреляции и с доверительной вероятности $p = 0{,}95$ проверить его значимость.
4. Сделать точечный и интервальный прогноз для случая расходов на рекламу, равных 5 млн. руб.
5. Построить график линии регрессии с нанесением на него опытных данных.

Таблица 1.

Вари-ант	Расходы на рекламу x_i, млн. р.									
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
	Количества продаж y_i, тыс. ед.									
0.	14,2	16,3	16,6	18,9	19,4	20,4	23,3	24,2	27,1	27,4

Решение

1. Точечными оценками математического ожидания и дисперсии служат соответственно выборочная средняя и «исправленная» выборочная дисперсия. Точечной оценкой среднего квадратического отклонения служит корень квадратный из «исправленной» выборочной дисперсии.

Для вычисления точечных оценок математического ожидания, дисперсии, и среднего квадратического отклонения показателей X и Y составим вспомогательную таблицу 2.

Таблица 2.

№	x_i	y_i	$x_i - x_{cp}$	$(x_i - x_{cp})^2$	$y_i - y_{cp}$	$(y_i - y_{cp})^2$
1	**0,0**	**14,2**	**-2,25**	**5,0625**	**-6,58**	**43,2964**
2	**0,5**	**16,3**	**-1,75**	**3,0625**	**-4,48**	**20,0704**
3	**1,0**	**16,6**	**-1,25**	**1,5625**	**-4,18**	**17,4724**
4	**1,5**	**18,8**	**-0,75**	**0,5625**	**-1,88**	**3,5344**
5	**2,0**	**19,4**	**-0,25**	**0,0625**	**-1,38**	**1,9044**
6	**2,5**	**20,4**	**0,25**	**0,0625**	**-0,38**	**0,1444**
7	**3,0**	**23,3**	**0,75**	**0,5625**	**2,52**	**6,3504**
8	**3,5**	**24,2**	**1,25**	**1,5625**	**3,42**	**11,6964**
9	**4,0**	**27,1**	**1,75**	**3,0625**	**6,32**	**39,9424**
10	**4,5**	**27,4**	**2,25**	**5,0625**	**6,62**	**43,8244**
Сумма	**22,5**	**207,8**	**0**	**20,625**	**0**	**188,236**
Среднее значение	**2,25**	**20,78**				

Выборочное среднее величины X определяется по формуле

$$x_{cp} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 2{,}25 \text{ (млн. руб.)}$$

Выборочная дисперсия величины X определяется по формуле

$$\sigma_x^2 = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{20{,}625}{10} = 2{,}0625$$

«Исправленная» выборочная дисперсия величины X определяется по формуле

$$s_x^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_x^2 = \frac{10}{10-1}2{,}0625 \approx 2{,}2917$$

«Исправленное» среднее квадратическое отклонение величины X определяется по формуле

$$s_x = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{2{,}2917} \approx 1{,}514 \text{ (млн. руб).}$$

Выборочное среднее величины Y определяется по формуле

$$y_{cp} = \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{207{,}8}{10} = 20{,}78 \text{ (тыс. ед.)}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \frac{188{,}236}{10} = 18{,}8236$$

«Исправленная» выборочная дисперсия величины Y определяется по формуле

$$s_y^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_y^2 = \frac{10}{10-1}18{,}8236 \approx 20{,}9151$$

«Исправленное» среднее квадратическое отклонение величины Y определяется по формуле

$$s_y = \sqrt{s_y^2} = \sqrt{20{,}9151} \approx 4{,}573 \text{ (тыс. ед.)}.$$

2. В соответствии с методом наименьших квадратов (МНК) параметры a и b линейного уравнения регрессии $\tilde{y} = ax + b$ определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} nb + a\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

Вычислим с помощью расчетной таблицы 3 необходимые вспомогательные суммы:

Таблица 3

№	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2	$\tilde{y}_i$	$y_i - \tilde{y}_i$	$(y_i - \tilde{y}_i)^2$
1	**0,0**	**14,2**	**0**	**0**	**201,64**	**14,055**	**0,145**	**0,021**
2	**0,5**	**16,3**	**8,15**	**0,25**	**265,69**	**15,5495**	**0,7505**	**0,5633**
3	**1,0**	**16,6**	**16,6**	**1**	**275,56**	**17,044**	**-0,444**	**0,1971**
4	**1,5**	**18,8**	**28,35**	**2,25**	**357,21**	**18,5385**	**0,3615**	**0,1307**
5	**2,0**	**19,4**	**38,8**	**4**	**376,36**	**20,033**	**-0,633**	**0,4007**
6	**2,5**	**20,4**	**51**	**6,25**	**416,16**	**21,5275**	**-1,1275**	**1,2713**
7	**3,0**	**23,3**	**69,9**	**9**	**542,89**	**23,022**	**0,278**	**0,0773**
8	**3,5**	**24,2**	**84,7**	**12,25**	**585,64**	**24,5165**	**-0,3165**	**0,1002**
9	**4,0**	**27,1**	**108,4**	**16**	**734,41**	**26,011**	**1,089**	**1,1859**
10	**4,5**	**27,4**	**123,3**	**20,25**	**750,76**	**27,5055**	**-0,1055**	**0,0111**
Итого	**22,5**	**207,8**	**529,2**	**71,25**	**4506,32**			**3,9585**

В таблице 3 приведены также колонки для y_i^2, $y_i-\tilde{y}_i$, $(y_i-\tilde{y}_i)^2$, которые будут использованы для вычисления линейного коэффициента парной корреляции и средней стандартной ошибки прогноза.

Используя данные таблицы 3 система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 10b+22{,}5a=207{,}8 \\ 22{,}5b+71{,}25a=529{,}2 \end{cases}$$

Эта система имеет решения $a\approx 2{,}989$ и $b\approx 14{,}055$. Линейное уравнение парной регрессии будет определяться по формуле

$$\tilde{y}=2{,}989x+14{,}055.$$

3. Линейный коэффициент парной корреляции определяется по формуле:

$$r=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2}}.$$

С помощью таблицы 3 получаем

$$r=\frac{10\cdot 529{,}2-22{,}5\cdot 207{,}8}{\sqrt{10\cdot 71{,}25-22{,}5^2}\cdot\sqrt{10\cdot 4506{,}32-207{,}8^2}}\approx 0{,}9894.$$

Так как коэффициент корреляции положителен и близок к единице, то между показателями *X и Y* существует очень тесная прямая связь.

Значимость коэффициента корреляции проверим с помощью $t-$критерия Стьюдента с доверительной вероятностью *p=0,95*, т.е. на уровне значимости $\alpha=0{,}05$.

Наблюдаемое значение $t-$критерия Стьюдента находится по формуле

$$t_н=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}=\frac{0{,}9894\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-0{,}9894^2}}\approx 19{,}30.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $k = n - 2 = 8$ находим по таблице критических точек распределения Стьюдента приложения 1:

$t_{кр}(0{,}95;8) = 2{,}31$. Так как $t_н > t_{кр}$, то коэффициент корреляции значимо отличается от нуля, т.е. является значимым.

4. Прогнозное значение количества продаж определим по регрессионному уравнению $\tilde{y} = 2{,}989x + 14{,}055$, подставив в него планируемую величину расходов на рекламу 5 млн. руб.:

$$\tilde{y}_{пр} = 2{,}989 \cdot 5 + 14{,}055 \approx 29{,}000 \text{ (тыс. ед.)}$$

Определим доверительный интервал прогноза для уровня значимости

$\alpha = 0{,}05$.

Средняя квадратическая ошибка прогноза находится по формуле

$$S_{пр} = S_y \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{пр} - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}},$$

где S_y^2 - дисперсия отклонений фактических наблюдений от расчетных и

$$S_y = \sqrt{S_y^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \tilde{y}_i)^2}{n - m}}.$$

Здесь m - число нормальных уравнений, связывающих независимые наблюдения случайной величины. В нашем случае m =2.

Предельная ошибка прогноза определяется по формуле

$$\Delta\bar{y}_{пр} = t_{кр}(0{,}95;\ 8) \cdot S_{пр} = 2{,}31 \cdot 0{,}852 \approx 1{,}968 \text{ (тыс.ед.)}.$$

Доверительный интервал прогноза будет определяться выражением

$$\bar{y}_{пр} \pm \Delta\bar{y}_{пр} = 29 \pm 1{,}968.$$

Таким образом, с вероятностью, равной 0,95, можно утверждать, что если расходы на рекламу составят 5 млн. руб., то количество продаж будет заключено в пределах от 29-1,968=27,032 до 29+1,968=30,968 (тыс. ед.)

5. На рис.1 представлен график линии регрессии с нанесением на него опытных данных. График выполнен с применением системы **Statistica.**

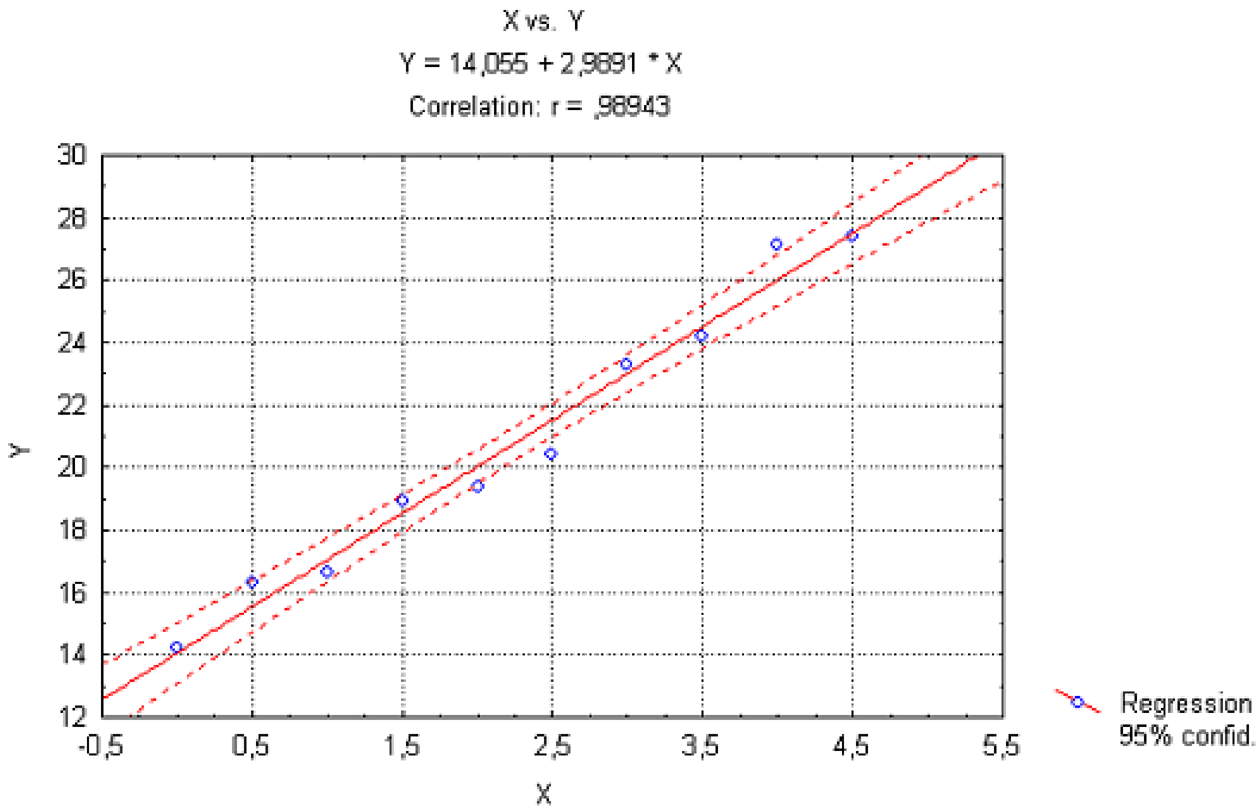

Рис. 1. График линии регрессии $\tilde{y} = 2{,}989x + 14{,}055$;

∘ опытные данные, _______ линейная модель регрессии;

----------- границы 95% доверительного коридора (трубки) (при выполнении задания «вручную» такие границы вычислять и строить на графике не нужно).

2.2. Пример выполнения контрольного задания № 2

Имеются данные о доли расходов на товары длительного пользования y_i от среднемесячного дохода семьи x_i. Предполагается, что эта зависимость носит нелинейный характер $\tilde{y} = a / x + b$. Необходимо:

1. Найти уравнение нелинейной гиперболической регрессии $\tilde{y} = a / x + b$.
2. Найти парный коэффициент корреляции и с доверительной вероятностью $p = 0{,}95$ проверить его значимость.

Таблица 4.

Вари-ант	Доход семьи x_i, тыс.р. на 1 чел.									
	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
	Процент расходов на товары длительного пользования y_i									
0.	27,0	23,4	22,1	20,5	19,3	18,9	17,3	16,7	17,7	16,1

Решение

1. Уравнение равносторонней гиперболы имеет вид: $\tilde{y} = a/x + b$.

Произведем линеаризацию модели путем замены $X = 1 / x$. В результате получим линейное уравнение $\tilde{y} = aX + b$. Рассчитаем его параметры по данным таблицы 5.

Таблица 5.

i	x_i	y_i	$X_i=1/x_i$	X_i^2	X_iy_i	$\tilde{y}_i$	$(y_i-\tilde{y}_i)$	$(y_i-\tilde{y}_i)^2$	$(y_i-\bar{y})$	$(y_i-\bar{y})^2$
1	2	27	0.50	0.25	13.50	26.88	0.1200	0.0144	7.1000	50.410
2	2.5	23.4	0.40	0.16	9.36	23.85	-0.4536	0.2058	3.5000	12.250
3	3	22.1	0.33	0.11	7.37	21.84	0.2639	0.0697	2.2000	4.8400
4	3.5	20.5	0.29	0.08	5.86	20.39	0.1050	0.0110	0.6000	0.3600
5	4	19.3	0.25	0.06	4.83	19.31	-0.0141	0.0002	-0.6000	0.3600
6	4.5	18.9	0.22	0.05	4.20	18.47	0.4265	0.1819	-1.0000	1.0000
7	5	17.3	0.20	0.04	3.46	17.80	-0.5010	0.2510	-2.6000	6.7600
8	5.5	16.7	0.18	0.03	3.04	17.25	-0.5507	0.3033	-3.2000	10.240
9	6	17.7	0.17	0.03	2.95	16.79	0.9078	0.8241	-2.2	4.8400
10	6.5	16.1	0.15	0.02	2.48	16.40	-0.3042	0.0925	-3.8	14.440
Σ	**42.5**	**199**	**2.69**	**0.84**	**57.03**			**1.9539**		**105.5**
Ср.	**4.25**	**19.9**								

Применяя МНК к уравнению $\tilde{y} = aX + b$, получим систему нормальных уравнений:

$$\begin{cases} nb + a\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ b\sum_{i=1}^{n} X_i + a\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i y_i; \end{cases} \quad \begin{cases} 10b + 2.6936 \cdot a = 199, \\ 2.6936b + 0.8391 \cdot a = 57.0321; \end{cases}$$

Эта система имеет решения $\begin{cases} a \approx 30.19346; \\ b \approx 11.76709. \end{cases}$

Уравнение нелинейной регрессии имеет вид:

$$\tilde{y} = 11.76709 + \frac{30.19346}{x};$$

2. Определим индекс корреляции по формуле:

$$p_{YX} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{1.9539}{105.5}} \approx 0.991;$$

Связь между показателем y и фактором x очень тесная.

Проверим значимость индекса корреляции с помощью F-критерия Фишера. Наблюдаемое значение статистики определяется по формуле:

$$F = \frac{p^2{}_{yx}}{1 - p_{yx}^2} \cdot (n-2) = \frac{0.991^2}{1 - 0.991^2} \cdot (10-2) \approx 423.953;$$

По таблице критических точек F-распределения Фишера-Снедекора приложения 2 находим табличное значение $F_{Табл}$.

$$F > F_{табл} = 5{,}32 \text{ для } \alpha = 0{,}05, \; k_1 = m = 1,$$

$$k_2 = n - m - 1 = 8$$

Индекс корреляции значим, т.к. $F > F_{Табл}$.

Нанесем на график фактические данные и построенную модель регрессии (рис.2 и рис.3).

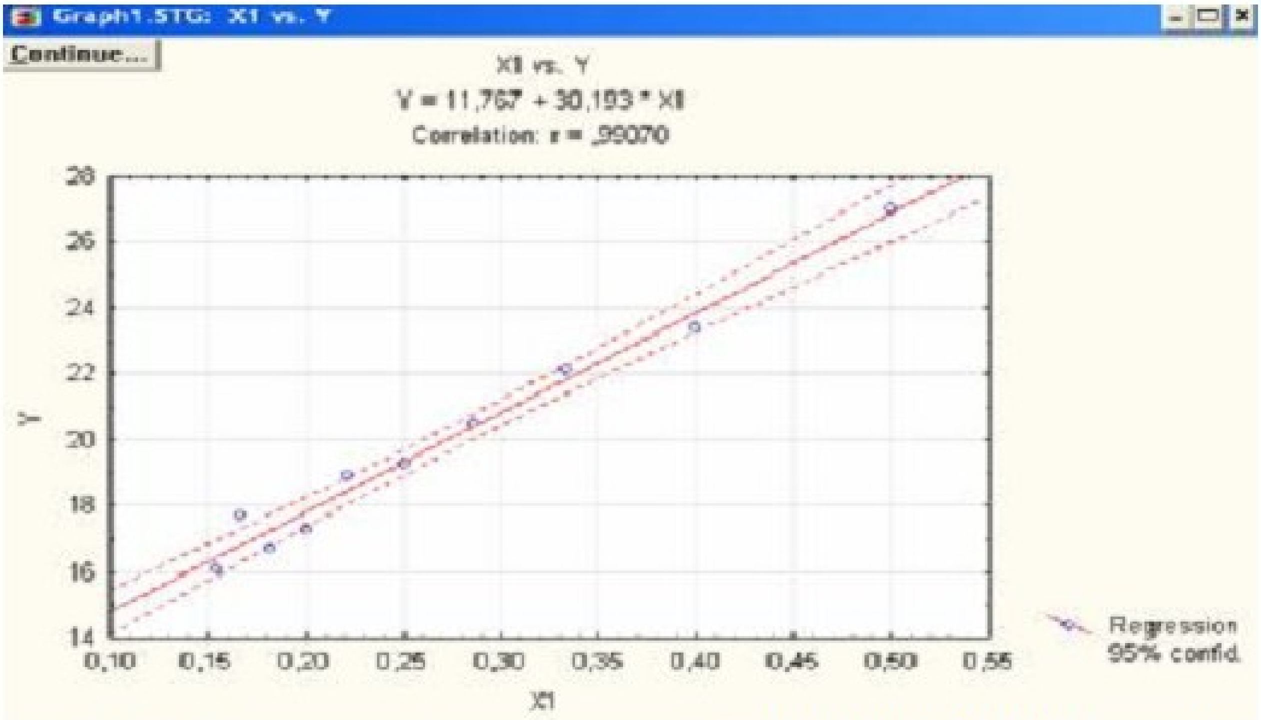

Рис.2. График линейной регрессии $\tilde{y} = 11.76709 + 30.193X$. ($X$=$X1$)

∘ - опытные данные, _______ линеаризованная модель регрессии; ----------- границы 95% доверительного коридора (трубки) (при выполнении задания такие границы вычислять и строить на графике не нужно). График выполнен с применением системы **Statistica.**

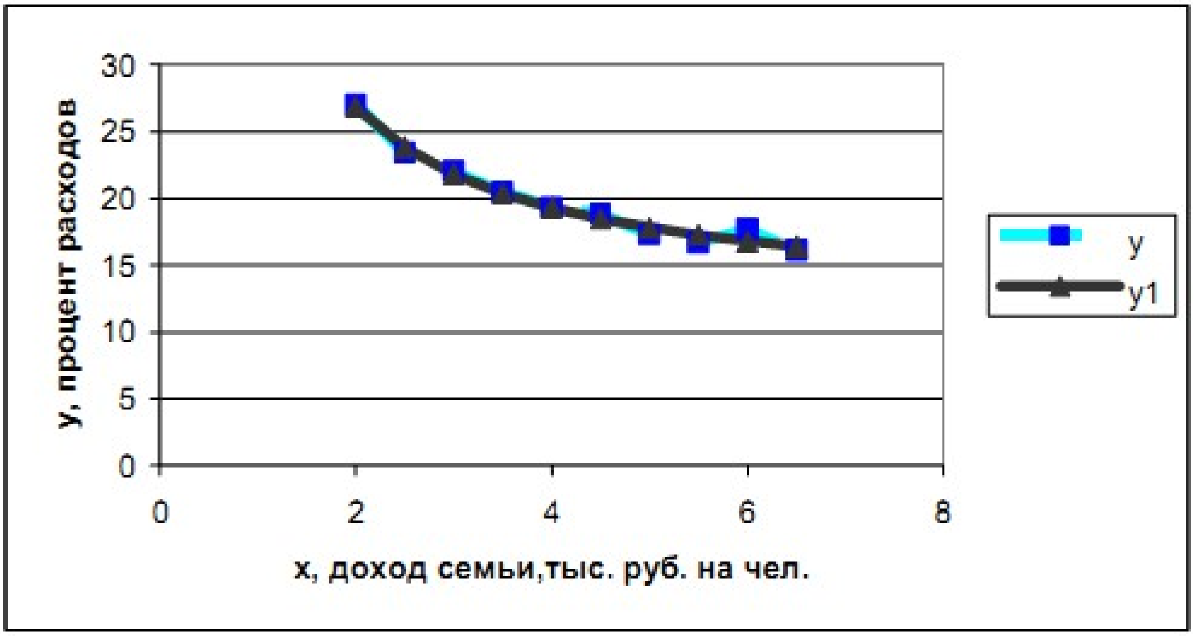

Рис.3. График нелинейной гиперболической регрессии

$\tilde{y} = 11.76709 + \dfrac{30.19346}{x}$; y- опытные данные, $y1 = \tilde{y}$ - гиперболическая модель регрессии.

График выполнен с применением табличного процессора **Excel.**

2.3. Пример выполнения контрольного задания № 3

Исследуется зависимость месячного расхода семьи на продукты питания z_i, тыс.р. от месячного дохода на одного члена семьи x_i тыс.р. и от размера семьи y_i, чел. Необходимо:

1. В соответствии с методом наименьших квадратов найти уравнение линейной регрессии $\tilde{z} = ax + by + c$.

2. Найти парные коэффициенты корреляции r_{xy}, r_{xz}, r_{yz}.

3. С доверительной вероятностью $p=0,95$ проверить коэффициенты корреляции на значимость.

4. Вычислить индекс множественной корреляции и проверить с доверительной вероятностью $p = 0,95$ его статистическую значимость.

Таблица 6.

Значения факторов x_i и y_i															
x_i	2	3	4	2	3	4	3	4	5	3	4	5	2	3	4
y_i	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5
Вар.	Значения фактора z_i														
0.	3,7	4,0	4,8	4,6	4,9	5,1	6,1	6,6	7,0	6,9	7,2	7,9	7,3	7,7	8,6

Решение

1. Согласно МНК параметры уравнения регрессии находятся по формуле:

$$A = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T Z,$$

где $X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix}$ - матрица значений объясняющих переменных;

$Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец значений зависимой переменной;

$A = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$ - матрица-столбец параметров линейного уравнения регрессии.

В нашем случае

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 3.7 \\ 4.0 \\ 4.8 \\ 4.6 \\ 4.9 \\ 5.1 \\ 6.1 \\ 6.6 \\ 7.0 \\ 6.9 \\ 7.2 \\ 7.9 \\ 7.3 \\ 7.7 \\ 8.6 \end{pmatrix}$$

Матрица $X^T X$ представляет собой матрицу сумм первых степеней, квадратов и произведений n наблюдений объясняю переменных:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} n & \sum_{n=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 51 & 45 \\ 51 & 187 & 156 \\ 45 & 156 & 165 \end{pmatrix}
$$

Обозначим через $B = X^T X$. Тогда матрица B^{-1} определяется по формуле

$$
B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \widetilde{B}^T ,
$$

где $|B|$ - определитель матрицы B, $\widetilde{B}$ - матрица, составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы B . $\widetilde{B}^{\mathrm{T}}$ – транспонированная матрица к матрице $\widetilde{B}$.

Получаем:

$$
|B| = 15 \cdot \left(187 \cdot 165 - 156^2\right) - 51 \cdot (51 \cdot 165 - 45 \cdot 156) +
$$

$$
+ 45 \cdot (51 \cdot 156 - 45 \cdot 187) = 5985
$$

$$
\widetilde{B}_{11} = \begin{vmatrix} 187 & 156 \\ 156 & 165 \end{vmatrix} = 187 \cdot 165 - 156^2 = 6519
$$

$$
\widetilde{B}_{12} = \begin{vmatrix} 51 & 156 \\ 45 & 165 \end{vmatrix} = -(51 \cdot 165 - 45 \cdot 156) = -1395
$$

$$
\widetilde{B}_{13} = \begin{vmatrix} 51 & 187 \\ 45 & 156 \end{vmatrix} = 51 \cdot 156 - 45 \cdot 187 = -459
$$

$$
\widetilde{B}_{21} = -\begin{vmatrix} 51 & 45 \\ 156 & 165 \end{vmatrix} = -(51 \cdot 165 - 156 \cdot 45) = -1395
$$

$$\widetilde{B}_{22} = \begin{vmatrix} 15 & 45 \\ 45 & 165 \end{vmatrix} = 15 \cdot 165 - 45^2 = 450$$

$$\widetilde{B}_{23} = -\begin{vmatrix} 15 & 51 \\ 45 & 156 \end{vmatrix} = -(15 \cdot 156 - 45 \cdot 51) = -45$$

$$\widetilde{B}_{31} = \begin{vmatrix} 51 & 45 \\ 187 & 156 \end{vmatrix} = 51 \cdot 156 - 187 \cdot 45 = -459$$

$$\widetilde{B}_{32} = -\begin{vmatrix} 15 & 45 \\ 51 & 156 \end{vmatrix} = -(15 \cdot 156 - 51 \cdot 45) = -45$$

$$\widetilde{B}_{33} = \begin{vmatrix} 15 & 51 \\ 51 & 187 \end{vmatrix} = 15 \cdot 187 - 51^2 = 204$$

Таким образом, матрица $\widetilde{B}$ имеет вид

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} & \widetilde{B}_{13} \\ \widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_{22} & \widetilde{B}_{23} \\ \widetilde{B}_{31} & \widetilde{B}_{32} & \widetilde{B}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6519 & -1395 & -459 \\ -1395 & 450 & -45 \\ -459 & -45 & 204 \end{pmatrix},$$

а матрица $\widetilde{B}^{\text{т}}$ примет вид

$$\widetilde{B}^{T} = \begin{pmatrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_{31} \\ \widetilde{B}_{12} & \widetilde{B}_{22} & \widetilde{B}_{32} \\ \widetilde{B}_{13} & \widetilde{B}_{23} & \widetilde{B}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6519 & -1395 & -459 \\ -1395 & 450 & -45 \\ -459 & -45 & 204 \end{pmatrix}$$

Для матрицы B^{-1} получаем:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \widetilde{B}^{T} = \frac{1}{5985} \bullet$$

$$\bullet \begin{pmatrix} 6519 & -1395 & -459 \\ -1395 & 450 & -45 \\ -459 & -45 & 204 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.08922 & -0.23308 & -0.0766 \\ -0.23308 & 0.07519 & -0.0075 \\ -0.07669 & -0.00752 & 0.0340 \end{pmatrix}$$

Нетрудно получить, что матрица

$$C = X^T \cdot Z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3.7 \\ 4.0 \\ 4.8 \\ 4.6 \\ 4.9 \\ 5.1 \\ 6.1 \\ 6.6 \\ 7.0 \\ 6.9 \\ 7.2 \\ 7.9 \\ 7.3 \\ 7.7 \\ 8.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 92.4 \\ 323.7 \\ 306.8 \end{pmatrix}$$

Окончательно, для матрицы A получаем

$$A = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot Z) = B^{-1} \cdot C =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.08922 & -0.23308 & -0.07669 \\ -0.23308 & 0.07519 & -0.00752 \\ -0.07669 & -0.00752 & 0.03409 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 92.4 \\ 323.7 \\ 306.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.666 \\ 0.495 \\ 0.937 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

Следовательно, $c = 1.666;$

$a = 0.495;$

$b = 0.937.$

Окончательно, уравнение множественной линейной регрессии имеет вид: $\tilde{z} = 1.666 + 0.495 \cdot x + 0.937 \cdot y$.

2. Рассчитаем парные коэффициенты корреляции по формулам:

$$r_{xz}=\frac{\frac{1}{n-1}\sum\left(x_i-\overline{x}\right)\left(z_i-\overline{z}\right)}{S_x\cdot S_z};\quad r_{yz}=\frac{\frac{1}{n-1}\sum\left(y_i-\overline{y}\right)\left(z_i-\overline{z}\right)}{S_y\cdot S_z};$$

$$r_{xy}=\frac{\frac{1}{n-1}\sum\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{S_x\cdot S_y};$$

где $S_x=\sqrt{\frac{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n-1}}$; $S_y=\sqrt{\frac{\sum\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{n-1}}$;

$S_z=\sqrt{\frac{\sum\left(z_i-\overline{z}\right)^2}{n-1}}$ - «исправленные» среднеквадратические отклонения величин *x, y* и *z*.

По данным расчетной таблицы 7 находим:

$$S_x=\sqrt{\frac{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{13.6}{14}}\approx 0.986;$$

$$S_y=\sqrt{\frac{\sum\left(y_i-\overline{y}\right)^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{30}{14}}\approx 1.464;\ S_z=\sqrt{\frac{\sum\left(z_i-\overline{z}\right)^2}{n-1}}\approx 1.53$$

Таблица 7.

i	x_i	y_i	z_i	$x_i-\bar{x}$	$y_i-\bar{y}$	$z_i-\bar{z}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(z_i-\bar{z})^2$	$(x_i-\bar{x})\cdot(z_i-\bar{z})$	$(y_i-\bar{y})\cdot(z_i-\bar{z})$	$(x_i-\bar{x})\cdot(y_i-\bar{y})$
1	2	1	3.7	-1.4	-2	-2.46	1.96	4	6.052	3.444	4.920	2.8
2	3	1	4	-0.4	-2	-2.16	0.16	4	4.666	0.864	4.320	0.8
3	4	1	4.8	0.6	-2	-1.36	0.36	4	1.850	-0.816	2.720	-1.2
4	2	2	4.6	-1.4	-1	-1.56	1.96	1	2.434	2.184	1.560	1.4
5	3	2	4.9	-0.4	-1	-1.26	0.16	1	1.588	0.504	1.260	0.4
6	4	2	5.1	0.6	-1	-1.06	0.36	1	1.124	-0.636	1.060	-0.6
7	3	3	6.1	-0.4	0	-0.06	0.16	0	0.004	0.024	0.000	0
8	4	3	6.6	0.6	0	0.440	0.36	0	0.194	0.264	0.000	0
9	5	3	7	1.6	0	0.840	2.56	0	0.706	1.344	0.000	0
10	3	4	6.9	-0.4	1	0.740	0.16	1	0.548	-0.296	0.740	-0.4
11	4	4	7.2	0.6	1	1.040	0.36	1	1.082	0.624	1.040	0.6
12	5	4	7.9	1.6	1	1.740	2.56	1	3.028	2.784	1.740	1.6
13	2	5	7.3	-1.4	2	1.140	1.96	4	1.300	-1.596	2.280	-2.8
14	3	5	7.7	-0.4	2	1.540	0.16	4	2.372	-0.616	3.080	-0.8
15	4	5	8.6	0.6	2	2.440	0.36	4	5.954	1.464	4.880	1.2
Ито-го	**51**	**45**	**92.4**	**0**	**0**	**0**	**13.6**	**30**	**32.896**	**9.54**	**29.6**	**3**
Ср. знач	**3.4**	**3**	**6.16**									

$$r_{xz}=\frac{\frac{1}{n-1}\sum\left(x_i-\bar{x}\right)\left(z_i-\bar{z}\right)}{S_x\cdot S_z}=\frac{\frac{1}{14}\cdot 9.54}{0.986\cdot 1.533}\approx 0.451$$

$$r_{yz}=\frac{\frac{1}{n-1}\sum\left(y_i-\bar{y}\right)\left(z_i-\bar{z}\right)}{S_y\cdot S_z}=\frac{\frac{1}{14}\cdot 29.6}{1.464\cdot 1.533}\approx 0.942$$

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum\left(x_i - \overline{x}\right)\left(y_i - \overline{y}\right)}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{14}\cdot 3}{0.986\cdot 1.464} \approx 0.149$$

Матрица парных коэффициентов корреляции примет вид:

$$Q_r = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & 1 & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.149 & 0.451 \\ 0.149 & 1 & 0.942 \\ 0.451 & 0.942 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Проверим коэффициенты корреляции на значимость с доверительной вероятностью $p=0,95$, т.е. на уровне значимости $\alpha = 1 - p = 0,05$.

Определим случайные ошибки коэффициентов корреляции:

$$\sigma_{r_{xz}} = \sqrt{\frac{1-r_{xz}^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0.451^2}{15-2}} \approx 0.248;$$

$$\sigma_{r_{yz}} = \sqrt{\frac{1-r_{yz}^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0.942^2}{15-2}} \approx 0.093;$$

$$\sigma_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1-r_{xy}^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0.149^2}{15-2}} \approx 0.274;$$

Определяем расчетные значения t-критерия Стьюдента:

$$t_{r_{xz}}^{расч} = \frac{r_{xz}}{\sigma_{r_{xz}}} = \frac{0.451}{0.248} \approx 1.822$$

$$t_{r_{yz}}^{расч} = \frac{r_{yz}}{\sigma_{r_{yz}}} = \frac{0.942}{0.093} \approx 10.143$$

$$t_{r_{xy}}^{расч} = \frac{r_{xy}}{\sigma_{r_{xy}}} = \frac{0.149}{0.274} \approx 0.542$$

По таблице распределения Стьюдента определяем критическое значение t-статистики (приложение 1): при $\alpha = 1 - p = 0,05$ и числе степеней свободы

$n-2=15-2=13$: $t_{кр} = 2,16.$

Сравнивая расчетные значения t-критерия с критическим значением, делаем вывод, что значимым является только коэффициент парной корреляции r_{yz}, т.к. для него

$$t_{r_{yz}}^{расч} > t_{кр}$$

4. Вычислим индекс множественной корреляции R через стандартизованные β - коэффициенты множественной регрессии и парные коэффициенты корреляции по формулам:

$$\beta_x = \frac{a \cdot S_x}{S_z} = \frac{0.495 \cdot 0.986}{1.533} \approx 0.318;$$

$$\beta_y = \frac{b \cdot S_y}{S_z} = \frac{0.937 \cdot 1.464}{1.533} \approx 0.895;$$

Индекс множественной корреляции равен:

$$R = \sqrt{\beta_x \cdot r_{xz} + \beta_y \cdot r_{yz}} = \sqrt{0.318 \cdot 0.451 + 0.895 \cdot 0.942} \approx 0.993;$$

Оценка значимости индекса множественной корреляции вытекает из оценки значимости индекса множественной детерминации с использованием общего F-критерия Фишера:

$$F = \frac{R^2(n-m-1)}{m(1-R^2)} = \frac{0.993^2(15-2-1)}{2(1-0.993^2)} = 447.427;$$

Здесь n - число наблюдений, $n=15$, m – число факторов множественной регрессии.

По таблице F-распределения приложения 2 находим для степеней свободы $k_1 = m = 2$ и $k_2 = n - m - 1 = 15 - 2 - 1 = 12$; $\alpha = 0{,}05$; $F_{кр} = 3{,}88$. Следовательно, значение индекса множественной корреляции является значимым, т.к. $F > F_{кр}$.

2.4. Пример выполнения контрольного задания № 4

Дана выборка курса биржевой стоимости акции некоторого предприятия за 12 месяцев.

1.Найти коэффициенты автокорреляции со смещением на 1,2,3 и 4 месяца.

2. Проверить найденные коэффициенты автокорреляции на значимость с доверительной вероятностью $p = 0{,}95$.

3. Построить коррелограмму.

4. Построить аддитивную (или мультипликативную) модель временного ряда.

Таблица 8.

Вари-ант	Стоимость акции по месяцам (руб.)											
0.	13,1	11,9	11,8	17,3	15,9	16,1	20,5	19,2	19,9	23,9	22,8	23,8

Решение

Коэффициенты автокорреляции со смещением (лагом) на k периодов находятся по формуле:

$$r(k) = \frac{(n-k)\sum_{t=1}^{n-k} y_t y_{t+k} - \sum_{t=1}^{n-k} y_t \cdot \sum_{t=1}^{n-k} y_{t+k}}{\sqrt{(n-k)\sum_{t=1}^{n-k} y_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-k} y_t\right)^2} \cdot \sqrt{(n-k)\sum_{t=1}^{n-k} y_{t+k}^2 - \left(\sum_{t=1}^{n-k} y_{t+k}\right)^2}}$$

Функция *r(k)* называется автокорреляционной функцией, а ее график - коррелограммой.

1.1. Рассчитаем коэффициент автокорреляции со смещением на 1 месяц. Для этого составим расчетную таблицу 9.

Таблица 9.

Месяц	y_t	y_{t+1}	y_t^2	y^2_{t+1}	$y_t y_{t+1}$
1	13.1	11.9	171.61	141.61	155.89
2	11.9	11.8	141.61	139.24	140.42
3	11.8	17.3	139.24	299.29	204.14
4	17.3	15.9	299.29	252.81	275.07
5	15.9	16.1	252.81	259.21	255.99
6	16.1	20.5	259.21	420.25	330.05
7	20.5	19.2	420.25	368.64	393.6
8	19.2	19.9	368.64	396.01	382.08
9	19.9	23.9	396.01	571.21	475.61
10	23.9	22.8	571.21	519.84	544.92
11	22.8	23.8	519.84	566.44	542.64
Итого	**192.4**	**203.1**	**3539.72**	**3934.55**	**3700.41**

$$r(1)=\frac{(12-1)\sum_{t=1}^{11} y_t y_{t+k}-\sum_{t=1}^{11} y_t\cdot\sum_{t=1}^{11} y_{t+k}}{\sqrt{(12-1)\sum_{t=1}^{11} y_t^2-\left(\sum_{t=1}^{11} y_t\right)^2}\cdot\sqrt{(12-1)\sum_{t=1}^{11} y_{t+1}^2-\left(\sum_{t=1}^{11} y_{t+1}\right)^2}}=$$

$$=\frac{11\cdot 3700.41-192.4\cdot 203.1}{\sqrt{11\cdot 3539.72-192.4^2}\cdot\sqrt{11\cdot 3934.55-201.3^2}}\approx 0.825;$$

1.2. Рассчитаем коэффициент автокорреляции со смещением на 2 месяца. Для этого составим расчетную таблицу 10.

Таблица 10.

Месяц	y_t	y_{t+2}	y_t^2	y_{t+2}^2	$y_t y_{t+2}$
1	13.1	11.8	171.61	139.24	154.58
2	11.9	17.3	141.61	299.29	205.87
3	11.8	15.9	139.24	252.81	187.62
4	17.3	16.1	299.29	259.21	278.53
5	15.9	20.5	252.81	420.25	325.95
6	16.1	19.2	259.21	368.64	309.12
7	20.5	19.9	420.25	396.01	407.95
8	19.2	23.9	368.64	571.21	458.88
9	19.9	22.8	396.01	519.84	453.72
10	23.9	23.8	571.21	566.44	568.82
Итого	**169.6**	**191.2**	**3019.88**	**3792.94**	**3351.04**

$$r(2)=\frac{(12-2)\sum_{t=1}^{10} y_t y_{t+2}-\sum_{t=1}^{10} y_t\cdot\sum_{t=1}^{10} y_{t+2}}{\sqrt{(12-2)\sum_{t=1}^{10} y_t^2-\left(\sum_{t=1}^{10} y_t\right)^2}\cdot\sqrt{(12-2)\sum_{t=1}^{10} y_{t+2}^2-\left(\sum_{t=1}^{10} y_{t+2}\right)^2}}=$$

$$= \frac{10 \cdot 3351.04 - 169.6 \cdot 191.2}{\sqrt{10 \cdot 3019.88 - 169.6^2} \cdot \sqrt{10 \cdot 3792.94 - 191.2^2}} \approx 0.772;$$

1.3. Рассчитаем коэффициент автокорреляции со смещением на 3 месяца. Для этого составим расчетную таблицу 11.

Таблица 11.

Месяц	y_t	y_{t+3}	y_t^2	y^2_{t+3}	$y_t y_{t+3}$
1	13.1	17.3	171.61	299.29	226.63
2	11.9	15.9	141.61	252.81	189.21
3	11.8	16.1	139.24	259.21	189.98
4	17.3	20.5	299.29	420.25	354.65
5	15.9	19.2	252.81	368.64	305.28
6	16.1	19.9	259.21	396.01	320.39
7	20.5	23.9	420.25	571.21	489.95
8	19.2	22.8	368.64	519.84	437.76
9	19.9	23.8	396.01	566.44	473.62
Итого	**145.7**	**179.4**	**2448.67**	**3653.7**	**2987.47**

$$r(3) = \frac{(12-3)\sum_{t=1}^{9} y_t y_{t+3} - \sum_{t=1}^{9} y_t \cdot \sum_{t=1}^{9} y_{t+3}}{\sqrt{(12-3)\sum_{t=1}^{9} y_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{9} y_t\right)^2} \cdot \sqrt{(12-3)\sum_{t=1}^{9} y_{t+3}^2 - \left(\sum_{t=1}^{9} y_{t+3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{9 \cdot 2987.47 - 145.7 \cdot 179.4}{\sqrt{9 \cdot 2448.67 - 145.7^2} \cdot \sqrt{9 \cdot 3653.7 - 179.4^2}} \approx 0.995;$$

1.4. Рассчитаем коэффициент автокорреляции со смещением на 4 месяца. Для этого составим расчетную таблицу 12.

Таблица 12.

Месяц	y_t	y_{t+4}	y_t^2	y^2_{t+4}	$y_t y_{t+4}$
1	13.1	15.9	171.61	252.81	208.29
2	11.9	16.1	141.61	259.21	191.59
3	11.8	20.5	139.24	420.25	241.9
4	17.3	19.2	299.29	368.64	332.16
5	15.9	19.9	252.81	396.01	316.41
6	16.1	23.9 ,	259.21	571.21	384.79
7	20.5	22.8,	420.25	519.84	467.4
8	19.2	23.8	368.64	566.44	456.96
Итого	**125.8**	**162.1**	**2052.66**	**3354.41**	**2599.5**

$$r(4)=\frac{(12-4)\sum_{t=1}^{8}y_t y_{t+4}-\sum_{t=1}^{8}y_t\cdot\sum_{t=1}^{8}y_{t+4}}{\sqrt{(12-4)\sum_{t=1}^{8}y_t^2-\left(\sum_{t=1}^{8}y_t\right)^2}\cdot\sqrt{(12-4)\sum_{t=1}^{8}y_{t+4}^2-\left(\sum_{t=1}^{8}y_{t+4}\right)^2}}=$$

$$=\frac{8\cdot 2599.5-125.8\cdot 162.1}{\sqrt{8\cdot 2052.66-125.8^2}\cdot\sqrt{8\cdot 3354.41-162.1^2}}\approx 0.700;$$

Проверим значимость всех коэффициентов автокорреляции.

Значимость коэффициентов автокорреляции принято проверять с помощью двух критериев: критерия стандартной ошибки и Q - критерия Бокса – Пирса.

Первый критерий используется для проверки значимости ***отдельного*** коэффициента автокорреляции. С его помощью удается выявить среди запаздывающих переменных те, которые необходимо включить в модель. Второй критерий позволяет сделать вывод о значимости всего множества переменных, включаемых в модель.

Суть проверки по первому критерию сводится к построению доверительного интервала для каждого коэффициента автокорреляции по формуле:

$$-1{,}96\frac{1}{\sqrt{n}}\le r_k\le 1{,}96\frac{1}{\sqrt{n}},$$

где n - число пар наблюдений временного ряда.

Возможность построения такого интервала основана на том, что коэффициенты автокорреляции случайных данных обладают выборочным распределением, приближающемся к нормальному с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, равным $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Если рассчитанное значение автокорреляции попадает в этот интервал, то можно сделать вывод, что данные ***не показывают*** наличие автокорреляции k *-го* порядка с *95%* уровнем надежности.

Статистика для проверки по Q критерию рассчитывается по формуле

$$Q = n\sum_{i=1}^{m} r_i^2 ,$$

где n - объем выборочной совокупности (длина временного ряда); m - максимальный рассматриваемый лаг.

Статистика Q имеет распределение χ^2 с m - степенями свободы и поэтому в случае, когда расчетное значение Q превосходит критическое значение χ^2 с соответствующими степенями свободы, то, ***в целом, вся группа коэффициентов для лагов, не превосходящих m,*** считается значимой.

Проверим значимость всех коэффициентов автокорреляции исходного временного ряда с помощью критерия стандартной ошибки. Доверительный интервал для $\kappa-$го коэффициента автокорреляции исходного временного ряда в соответствии с формулой

$$\frac{-1.96}{\sqrt{n}} \le r_k \le \frac{1.96}{\sqrt{n}}$$

будет равен:

1) для r *(1)* $\frac{-1.96}{\sqrt{11}} \le r(1) \le \frac{1.96}{\sqrt{11}}$ или

$-0,591 \le r(1) \le 0,591$, так как объем выборки в этом случае составляет *n-1=12-1=11* пар наблюдений;

2) для r *(2)* $\frac{-1.96}{\sqrt{10}} \le r(2) \le \frac{1.96}{\sqrt{10}}$ или

$-0,620 \le r(1) \le 0,620$, так как объем выборки в этом случае составляет *n-2=12-2=10* пар наблюдений;

3) для r *(3)* $\frac{-1.96}{\sqrt{9}} \le r(3) \le \frac{1.96}{\sqrt{9}}$ или

$-0,653 \le r(1) \le 0,653$, так как объем выборки в этом случае составляет *n-3=12-3=9* пар наблюдений;

4) для r *(4)* $\frac{-1.96}{\sqrt{8}} \le r(4) \le \frac{1.96}{\sqrt{8}}$ или

$-0,693 \le r(1) \le 0,693$, так как объем выборки в этом случае составляет *n-4=12-4=8* пар наблюдений.

Рассчитанные значения коэффициентов автокорреляции исходного ряда составляют

$$r(1) = 0.825$$
$$r(2) = 0.772$$
$$r(3) = 0.995$$
$$r(4) = 0.700$$

и не попадают в соответствующие доверительные интервалы. Тогда делаем вывод, что данные наблюдений ***показывают*** наличие автокорреляции 1-ого, 2-ого, 3-его и 4-ого порядков.

Проверим ***значимость всей группы коэффициентов*** автокорреляции с помощью *Q*-критерия Бокса-Пирса.

Наблюдаемое значение *Q*-статистики равно

$$Q_H = n\sum_{i=1}^{m} r_i^2 = 12\sum_{i=1}^{4} r_i^2 = 12 \cdot \left(0.825^2 + 0.772^2 + 0.995^2 + 0.700\right) \approx 33.08$$

Для уровня значимости $\alpha = 0.05$ и числа степеней свободы *k = 4* находим по таблице критических точек распределения χ^2 приложения 3

$$\chi^2_{кр}(\alpha = 0.05; k = 4) = 9.5 .$$

Так как $Q_H > \chi^2_{кр}$, то в целом, вся группа коэффициентов для лагов, не превосходящих *m = 4*, считается ***значимой.***

3. Построим коррелограмму для исходного временного ряда (рис.4).

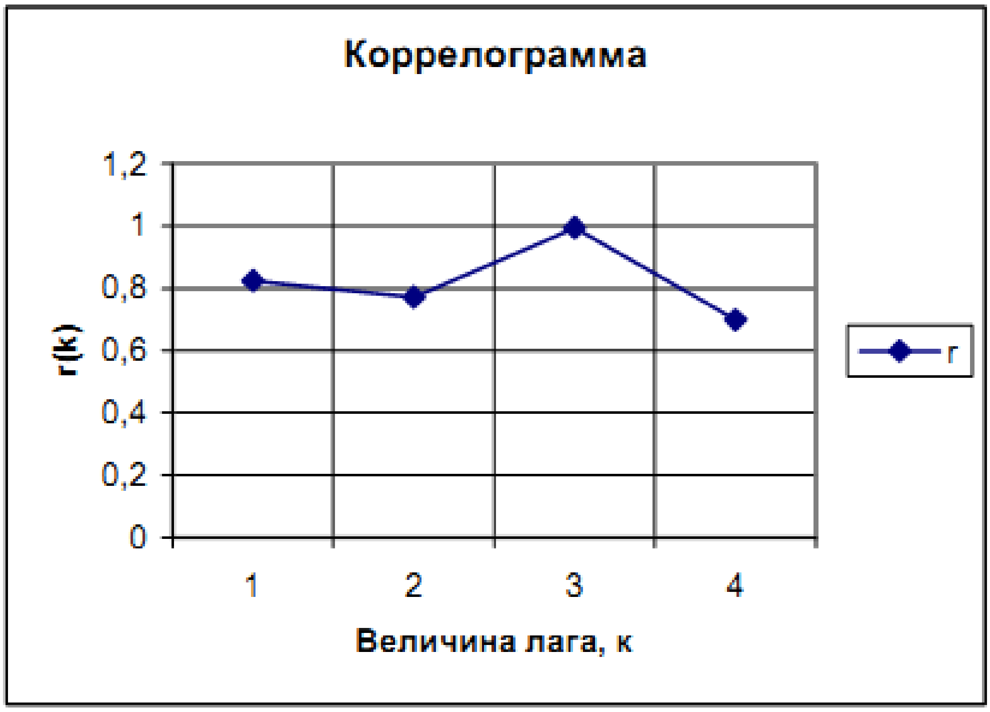

Рис.4. График автокорреляционной функции $r(k)$ (коррелограмма исходного временного ряда). График выполнен с применением табличного процессора **Excel.**

Знание автокорреляционной функции $r(k)$ может оказать помощь при подборе и идентификации модели анализируемого временного ряда и статистической оценки его параметров.

По коэффициенту автокорреляции можно судить о наличии ***линейной или близкой к линейной тенденции***. Для некоторых временных рядов, имеющих сильную ***нелинейную тенденцию***, например, параболу второго порядка или экспоненту, коэффициент автокорреляции уровней исходного ряда может приближаться к нулю. По знаку коэффициента автокорреляции нельзя делать вывод о возрастающей или убывающей тенденции в уровнях временного ряда. Большинство временных рядов экономических данных содержат положительную автокорреляцию уровней, однако при этом они могут иметь убывающую тенденцию.

Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, исследуемый ряд содержит ***только тенденцию***. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка ***к***, исследуемый ряд содержит ***циклические (сезонные) колебания с периодичностью в к моментов времени.*** Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, можно сделать предположение относительно структуры этого ряда: ***либо ряд не содержит тенденции и циклических колебаний, либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию,*** для выявления которой нужно провести дополнительный анализ.

Следует отметить, что интерпретация коррелограмм требует определенного навыка и не всегда легко осуществима.

Если при анализе временного ряда установлено, что ряд содержит сезонные или циклические колебания, то при моделировании сезонных колебаний применяют простейший подход – рассчитывают значения сезонной компоненты методом скользящей средней и строят аддитивную или мультипликативную модель временного ряда.

Общий вид аддитивной модели следующий:

$$Y=T+S+E.$$

Такая модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как сумма трендовой T, сезонной S и случайной E компонент. Общий вид мультипликативной модели может быть представлен формулой

$$Y=T \cdot S \cdot E.$$

Данная модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как произведение трендовой T, сезонной S и случайной E компонент. Выбор одной из двух моделей проводится на основе анализа структуры сезонных колебаний.

Если амплитуда колебаний приблизительно постоянна, строят аддитивную модель временного ряда, в которой значения сезонной компоненты предполагаются постоянными для различных циклов.

Если амплитуда сезонных колебаний возрастает или уменьшается, строят мультипликативную модель временного ряда, которая ставит уровни ряда в зависимость от значений сезонной компоненты.

Построение аддитивной и мультипликативной моделей сводится к расчету значений T, S и E для каждого уровня ряда.

Процесс построения модели включает в себя следующие пункты.

1) Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.
2) Расчет значений сезонной компоненты S.
3) Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных $(T+S)$ в аддитивной модели или $(T \cdot S)$ в мультипликативной модели.

4) Аналитическое выравнивание уровней $(T+S)$ или $(T \cdot S)$ и расчет значений T с использованием полученного уравнения тренда.

5) Расчет полученных по модели значений $(T+S)$ или $(T \cdot S)$.

6) Расчет абсолютных или относительных ошибок.

4. Проведем анализ исходного временного ряда по его коррелограмме, изображенной на рис. 4.

На рис.5 по графику наблюдаемых значений временного ряда ***наглядно видно*** наличие возрастающей тенденции. Поэтому во временном ряду ***возможно*** существование линейного тренда.

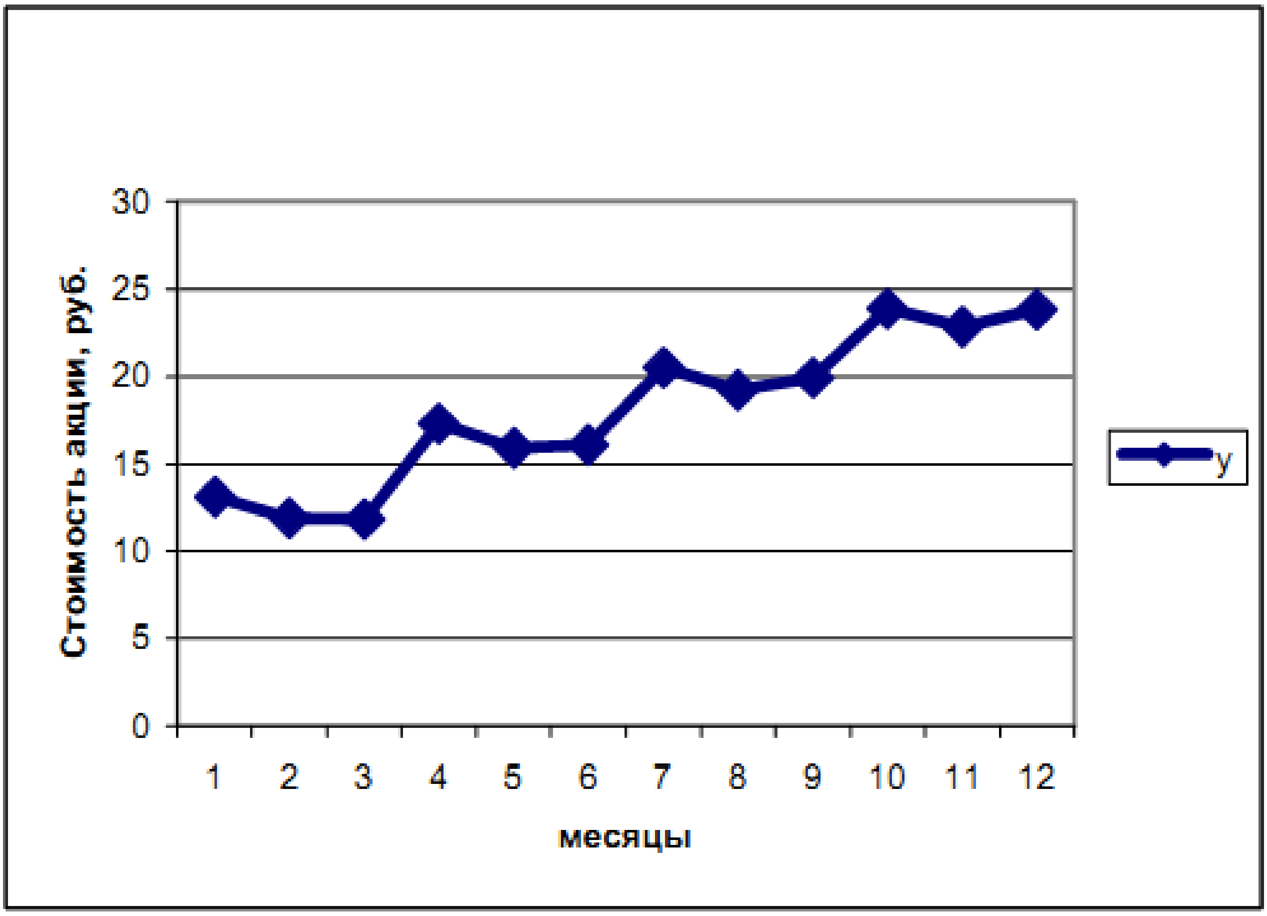

Рис.5. График наблюдаемых значений исходного временного ряда .

Высокие значения коэффициентов автокорреляции первого, второго и третьего порядков, а также значимость всей группы коэффициентов автокорреляции, свидетельствуют о том, что ряд ***содержит линейную тенденцию.*** Высокое значение коэффициента автокорреляции третьего порядка свидетельствует о том, что ряд ***содержит циклические (сезонные) колебания с периодичностью в 3***

Поскольку амплитуда колебаний приблизительно постоянна, выбираем аддитивную модель временного ряда.

Рассчитаем компоненты выбранной модели.

1). Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней. Для этого: просуммируем уровни ряда последовательно за каждые 3 месяца со сдвигом на один месяц и, разделив полученные суммы на 3, найдем скользящие средние (гр.3 табл. 13);

2). Найдем оценки сезонной компоненты как разность между фактическими уровнями ряда и уровнями скользящей средней (гр.4 табл.13). Используем эти оценки для расчета значений сезонной компоненты S (табл.14). Для этого найдем средние за каждый месяц (по всем кварталам) оценки сезонной компоненты S_i. В моделях с сезонной компонентой обычно предполагается, что сезонные воздействия за период взаимно погашаются. Для аддитивной модели это выражается в том, что сумма сезонной компоненты по всем месяцам должна быть равна нулю.

Таблица13.

t, месяцы	y_t, стоимость акции, руб.	Простая 3-х членная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	13,1	-	-
2	11,9	12,267	-0,367
3	11,8	13,667	-1,867
4	17,3	15	2,3
5	15,9	16,433	-0,533
6	16,1	17,5	-1,4
7	20,5	18,6	1,9
8	19,2	19,867	-0,667
9	19,9	21	-1,1
10	23,9	22,2	1,7
11	22,8	23,5	-0,7

Таблица 14.

Показатель		Номер месяца, i		
		1	*2*	*3*
Квартал	1	-	-0,36667	-1,86667
	2	2,3	-0,53333	-1,4
	3	1,9	-0,66667	-1,1
	4	1,7	-0,7	-
Итого за i -ый месяц (за весь год)		5,9	-2,26667	-4,36667
Средняя оценка сезонной компоненты для , i –го месяца, $\bar{S}_i$		1,96667	-0,56667	-1,45556
Скорректированная сезонная компонента, S_i		1,98519	-0,54815	-1,43704

Для данной модели получаем:

1,96667-0,56667-1,45556=-0,05556.

Корректирующий коэффициент определится по формуле:

$$f = \frac{\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3}{3} = -\,0{,}05556\,/\,3 = -0{,}01852.$$

Скорректированные значения сезонной компоненты определяются как разность между ее средней оценкой и корректирующим коэффициентом f:

$$S_i = \bar{S}_i - f, \quad i=1,2,3.$$

Проверяем условие равенства нулю суммы значений сезонной компоненты $S_1 + S_2 + S_2 = 0$:

1,98519-0,54815-1,43704=0.

Окончательно, для сезонной компоненты получены следующие значения:

за 1 месяц $S_1 = 1{,}98519$;

за 2 месяц $S_2 = -0{,}54815$;

за 3 месяц $S_1 = -1,43704$.

Полученные данные записываем в таблицу 15 для соответствующих месяцев года.

3) Элиминируем влияние сезонной компоненты, вычитая ее значение из каждого уровня исходного ряда:

$$T+E=Y-S \text{ (гр.4 табл. 15).}$$

Таблица 15.

t	y_t	S_i	$T+E= =y_t-S_i$	T	$T+S$	$E=y_t- -(T+S_i)$	E^2	$y_t-\bar{y}_t$	$(y_t-\bar{y}_t)^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	13,1	1,985	11,115	11,186	13,171	-0,071	0,005	-4,917	24,174
2	11,9	-0,548	12,448	12,428	11,88	0,019	0	-6,117	37,414
3	11,8	-1,437	13,237	13,670	12,233	-0,433	0,035	-6,217	38,647
4	17,3	1,985	15,315	14,912	16,897	0,403	0,026	-0,717	0,514
5	15,9	-0,548	16,448	16,154	15,606	0,294	0,007	-2,117	4,48
6	16,1	-1,437	17,537	17,396	15,959	0,141	0	-1,917	3,673
7	20,5	1,985	18,515	18,638	20,623	-0,123	0	2,483	6,167
8	19,2	-0,548	19,748	19,88	19,331	-0,131	0	1,183	1,4
9	19,9	-1,437	21,337	21,121	19,684	0,216	0,002	1,883	3,547
10	23,9	1,985	21,915	22,363	24,348	-0,448	0,04	5,883	34,614
11	22,8	-0,548	23,348	23,605	23,057	-0,257	0,004	4,783	22,88
12	23,8	-1,437	25,237	24,847	23,41	0,39	0,152	5,783	33,447
Итого							0,274		210,957

4). Определим трендовую компоненту T данной модели. Проведем аналитическое выравнивание ряда *(T+E)* (гр.4 табл. 15) с помощью линейного тренда.

Для удобства переобозначим ряд *(T+E)* как *W:*

$$W=T+E.$$

Линейная модель тенденции временного ряда *W* имеет вид

$$\tilde{w}_t = a \cdot t + b.$$

Согласно методу наименьших квадратов параметры модели линейного тренда определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} nb + a\sum_{t=1}^{n} t = \sum_{t=1}^{n} w_t; \\ b\sum_{t=1}^{n} t + a\sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} tw_t \end{cases}$$

Вычислим в таблице 13 необходимые суммы:

Таблица 16.

t	w_t	t^2	tw_t	$\widetilde{w}_t$
1	11,115	1	11,115	11,18636
2	12,448	4	24,85647	12,42823
3	13,237	9	41,01032	13,67011
4	15,315	16	59,64793	14,91198
5	16,448	25	80,76928	16,15386
6	17,537	36	104,3744	17,39573
7	18,515	49	130,4632	18,6376
8	19,748	64	159,0358	19,87948
9	21,337	81	190,0922	21,12135
10	21,915	100	223,6323	22,36323
11	23,348	121	259,6561	23,6051
12	25,237	144	302,844	24,84697
Итого 78	216,5187	650	1587,497	

Система нормальных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 12b + 78a = 216,5187 \\ 78b + 650a = 1587,497; \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1,241874; \\ b = 9,944485. \end{cases}$$

Линейная модель тенденции временного ряда имеет вид:

$$\widetilde{w}_t = 1,241874 \cdot t + 9,944485 .$$

Подставив в это уравнение значения $t = 1,2,3, \ldots, 12$, получим ыровненные уровни $\widetilde{w}_t$ для каждого момента времени (табл. 16) или, старых обозначениях, уровни $(T+E)$ (гр.5 табл.15).

5) Найдем значения уровней ряда, полученные по аддитивной модели. Для этого прибавляем к уровням T значения сезонной компоненты для соответствующих месяцев (гр.6 табл.15).

6) Расчет ошибки проводится по формуле

$$E=Y-(T+S).$$

Значения абсолютных ошибок приведены в гр.7 табл.15.

Для выбора лучшей модели можно использовать сумму квадратов абсолютных ошибок, которая в нашем случае равна **0,274** (см. гр.8 табл. 15).

Средний уровень исходного временного ряда легко посчитать по гр.2 табл.15. Он будет равен

$$\overline{y}_t = (13,1+11,9+11,8+\ldots+23,8)/12 = \mathbf{18,017}.$$

Рассчитаем отклонения уровней исходного ряда от его среднего для каждого месяца $y_t - \overline{y}_t$ (гр.9 табл. 15).

Рассчитаем сумму квадратов отклонений уровней ряда от его среднего уровня $\sum (y_t - \overline{y}_t)^2$ (гр.10 табл. 15), которая равна **210,957**.

По аналогии с моделью регрессии для оценки качества построенной модели составляем величину

$$1 - (0,274085 / 210,9567) = 0,9987 \quad \text{или} \quad 99,87\%$$

Следовательно, можно утверждать, что аддитивная модель объясняет 99,87% общей вариации уровней временного ряда стоимости акции за последние 12 месяцев.

Если при выборе модели сезонных колебаний была выбрана мультипликативная модель, то методика её построения состоит из следующих шагов (на примере модели с периодичностью в 3 месяца):

1). Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней. Для этого:

просуммируем уровни ряда последовательно за каждые 3 месяца со сдвигом на один месяц и, разделив полученные суммы на 3, найдем скользящие средние ;

2). Найдем оценки сезонной компоненты как ***частное от деления*** фактических уровней ряда на уровни скользящей средней. Используем эти оценки для расчета значений сезонной компоненты S. Для этого найдем средние за каждый месяц (по всем кварталам) оценки сезонной компоненты S_i. В моделях с сезонной компонентой

погашаются. Для мультипликативной модели это выражается в том, что сумма сезонной компоненты по всем месяцам должна быть ***равна числу периодов в цикле, то есть 3;***
корректирующий коэффициент рассчитывается по формуле

$$f = \frac{3}{\overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \overline{S}_3}$$

Скорректированные значения сезонной компоненты определяются ***как произведение*** средней оценки на корректирующий коэффициент *f*:

$$S_i = \overline{S}_i \cdot f, \quad i=1,2,3.$$

Проверяется условие равенства ***трем*** суммы значений сезонной компоненты

$$S_1 + S_2 + S_2 = 3.$$

3). Делится каждый уровень исходного ряда на соответствующие значения сезонной компоненты. При этом в таблицу заносится величина

$$T{\cdot}E=Y/S.$$

4). Определим трендовую компоненту T мультипликативной модели. Проведем аналитическое выравнивание ряда $(T{\cdot}E)$ с помощью линейного тренда. Для удобства переобозначим ряд $(T{\cdot}E)$ как W:

$$W=T{\cdot}E.$$

Линейная модель тенденции временного ряда W имеет вид

$$\widetilde{w}_t = a \cdot t + b .$$

Согласно методу наименьших квадратов параметры модели линейного тренда ***a*** и ***b*** определяются из системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} nb + a\sum_{t=1}^{n} t = \sum_{t=1}^{n} w_t; \\ b\sum_{t=1}^{n} t + a\sum_{t=1}^{n} t^2 = \sum_{t=1}^{n} tw_t \end{cases}$$

Подставив в уравнение $\widetilde{w}_t = a \cdot t + b$ значения $t = 1,2,3, \ldots, 12$, получим выровненные уровни $\widetilde{w}_t$ для каждого момента времени или, в старых обозначениях, уровни $(T{\cdot}E)$.

5) Найдем значения уровней ряда, полученные по мультипликативной модели. Для этого ***умножим*** уровни T на значения сезонной компоненты для соответствующих месяцев.

6) Расчет ошибки в мультипликативной модели проводится по формуле

$$E=Y / (T \cdot S).$$

Для сравнения мультипликативной модели с другими моделями временного ряда можно использовать сумму квадратов абсолютных ошибок. Абсолютные ошибки в мультипликативной модели определяются по формуле

$$E' = y_t - (T \cdot S).$$

Делается в таблице восьмой столбец для величины E' и девятый столбец для квадрата абсолютной ошибки $(E')^2$. Рассчитаем отклонения уровней исходного ряда от его среднего для каждого месяца $y_t - \bar{y}_t$ (в десятом столбце таблицы).

Рассчитаем сумму квадратов отклонений уровней ряда от его среднего уровня $\sum (y_t - \bar{y}_t)^2$ (в столбце 11 таблицы).

С помощью величины $1 - \frac{(E')^2}{\sum (y_t - \bar{y}_t)^2}$ вычисляется доля объясненной дисперсии уровней ряда.

Таким образом, рассчитанная мультипликативная модель исходного временного ряда с сезонной составляющей

$$Y=T \cdot S \cdot E$$

представляется в таблице 17.

Таблица 17

t	y	S	$T \cdot E=Y/S$	T	$T \cdot S$	$E=y/(T \cdot S)$	$E'=y-(T \cdot S)$	$(E')^2$	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

При выборе модели с сезонной компонентой можно также применить ***модель регрессии с включением фактора времени и фиктивных переменных***. Подробная методика построения этой модели приведена в литературе [2].

2. Задания расчётно-графической работы.

Задание № 1.

Некоторая фирма, производящая товар, хочет проверить, эффективность рекламы этого товара. Для этого в 10 регионах, до этого имеющих одинаковые средние количества продаж, стала проводиться разная рекламная политика и на рекламу начало выделяться x_i денежных средств. При этом фиксировалось число продаж y_i. Предполагая, что для данного случая количество продаж X пропорциональны расходам на рекламу Y, необходимо:

1. Вычислить точечные оценки для математического ожидания, дисперсии и среднеквадратического отклонения показателей X и Y.
2. В соответствии с методом наименьших квадратов найти уравнение линейной регрессии $\tilde{y} = ax + b$.
3. Найти парный коэффициент линейной корреляции и с доверительной вероятности $p = 0{,}95$ проверить его значимость.
4. Сделать точечный и интервальный прогноз для случая расходов на рекламу, равных 5 млн. руб.
5. Построить график линии регрессии с нанесением на него опытных данных.

Вариант	Расходы на рекламу x_i, млн. р.(одинаковое для всех вариантов)									
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
	Количества продаж y_i, тыс. ед. (по вариантам)									
1.	12,3	16,3	16,4	16,0	18,5	17,3	20,0	19,5	19,0	19,7
2.	39,5	40,3	40,7	40,8	43,1	42,7	45,3	46,2	47,4	49,5
3.	32,4	32,4	34,8	37,1	38,0	38,7	38,6	39,9	43,8	43,5
4.	21,0	23,0	23,7	23,8	25,8	27,6	28,4	29,7	31,7	31,6
5.	27,6	28,8	29,6	31,1	30,9	31,3	33,1	34,6	35,1	37,2
6.	30,6	32,8	32,1	33,7	35,1	39,2	37,4	39,7	42,3	43,4
7.	18,5	19,5	20,1	23,7	23,6	24,0	26,2	26,5	28,3	28,1
8.	13,3	12,2	13,1	11,5	15,7	13,7	16,8	13,9	16,9	16,8
9.	14,1	16,2	16,5	18,9	19,5	20,3	23,4	24,3	27,2	27,5
10.	34,4	34,8	36,1	37,7	37,3	37,5	37,5	39,6	40,9	43,6
11.	20,6	20,2	19,6	21,3	23,2	23,9	23,2	23,0	24,1	25,2
12.	17,4	18,6	18,0	21,3	21,3	24,4	24,1	27,2	27,0	28,7
13.	38,3	39,3	40,1	43,9	42,9	42,1	45,2	44,3	47,9	47,8
14.	38,0	40,9	39,1	39,7	39,3	38,4	41,4	42,9	41,3	42,7
15.	36,7	36,5	37,2	38,0	38,3	39,5	41,7	39,9	42,0	41,8
16.	38,1	38,6	40,9	38,6	41,3	43,1	44,3	43,0	45,8	46,2
17.	30,8	31,1	30,4	31,7	30,5	33,5	31,0	34,5	36,0	32,9
18.	10,7	11,0	13,2	12,4	13,2	13,3	14,4	15,3	14,8	14,8
19.	23,7	24,8	25,8	27,6	26,9	25,2	26,6	26,3	29,0	30,4
20.	22,8	26,3	28,0	26,1	26,0	29,9	30,9	32,9	33,9	33,5

Задание № 2

Имеются данные о доли расходов на товары длительного пользования y_i от среднемесячного дохода семьи x_i. Предполагается, что эта зависимость носит нелинейный характер $\tilde{y} = a / x + b$. Необходимо:

1. Найти уравнение нелинейной гиперболической регрессии $\tilde{y} = a / x + b$.

2. Найти парный коэффициент корреляции и с доверительной вероятностью $p = 0{,}95$ проверить его значимость.

Вариант	Доход семьи x_i, тыс.р. на 1 чел.(для всех вариантов)									
	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
	Процент расходов на товары длительного пользования y_i (по вариантам)									
21.	29,3	25,4	25,0	23,4	23,1	22,6	21,7	21,7	22,2	22,4
22.	31,2	27,0	26,1	26,1	23,1	23,8	22,3	21,4	21,8	22,5
23.	29,7	26,3	24,8	23,5	22,3	21,7	21,5	19,0	20,5	22,8
24.	20,4	19,7	16,6	17,3	15,1	15,2	14,3	14,1	14,3	14,1
25.	30,7	27,0	25,1	24,1	21,3	22,7	23,7	20,8	19,8	21,9
26.	29,7	28,2	24,6	24,6	22,8	22,2	22,0	21,8	23,3	21,5
27.	31,4	28,4	27,3	24,9	23,5	23,6	23,2	21,8	23,3	22,1
28.	27,9	25,4	20,7	23,6	21,6	20,1	21,3	21,2	20,8	18,5
29.	27,1	23,3	22,2	20,6	19,2	18,8	17,3	16,8	17,6	16,2
30.	30,0	27,9	25,7	23,7	21,8	21,7	22,0	19,3	22,2	19,5
31.	29,5	27,2	23,4	21,9	21,3	22,2	21,0	20,0	20,2	19,6
32.	29,8	26,9	24,3	23,7	23,0	23,2	20,7	21,9	21,0	20,7
33.	26,7	24,5	19,5	21,5	21,0	18,0	16,5	16,2	17,2	17,8
34.	24,7	21,5	22,1	21,9	20,3	19,1	20,6	20,2	18,7	20,3
35.	27,1	23,9	25,1	20,9	21,6	20,6	20,5	19,1	21,8	20,6
36.	27,9	24,3	22,1	21,8	20,7	17,9	17,8	19,5	15,8	20,1
37.	23,2	19,7	19,2	16,5	16,7	17,8	16,2	16,8	14,5	15,6
38.	23,1	22,4	19,1	18,3	16,7	15,3	17,3	16,2	14,7	15,8
39.	27,8	25,3	25,2	24,9	24,7	24,8	23,4	22,9	21,4	22,0
40.	19,9	19,4	17,5	17,2	16,5	16,1	13,5	13,8	15,1	13,2

Задание № 3

Исследуется зависимость месячного расхода семьи на продукты питания z_i, тыс.р. от месячного дохода на одного члена семьи x_i тыс.р. и от размера семью y_i, чел. Необходимо:

1. В соответствии с методом наименьших квадратов найти уравнение линейной регрессии $\tilde{z} = ax + by + c$.

2. Найти парные коэффициенты корреляции r_{xy}, r_{xz}, r_{yz}.

3. С доверительной вероятностью p=0,95 проверить коэффициенты корреляции на значимость.

4. Вычислить индекс множественной корреляции и проверить с доверительной вероятностью $p = 0{,}95$ его статистическую значимость.

Значения факторов x_i и y_i (одинаковое для всех вариантов)															
x_i	2	3	4	2	3	4	3	4	5	3	4	5	2	3	4
y_i	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5
Вариант	Значения фактора z_i (по вариантам)														
41.	2,1	2,6	2,5	2,9	3,1	3,3	3,9	4,5	4,9	4,6	5,1	5,7	5,0	5,4	5,6
42.	2,3	2,1	2,9	2,7	3,2	3,4	3,8	4,2	4,2	4,5	5,2	5,8	4,7	5,5	5,1
43.	2,4	3,1	3,4	3,7	4,0	4,2	4,5	4,7	6,0	5,9	6,3	6,4	6,3	6,5	7,2
44.	1,2	1,5	2,0	2,2	2,5	2,5	2,6	3,0	3,3	3,0	3,7	3,6	3,5	4,2	4,6
45.	2,6	2,8	3,3	3,4	3,6	4,2	4,7	4,8	5,6	5,3	5,8	5,7	5,8	6,2	6,5
46.	1,6	2,2	2,3	2,3	2,6	3,0	3,1	3,2	3,4	3,4	3,6	3,8	3,8	4,1	4,3
47.	1,9	2,7	2,7	3,1	3,2	3,3	3,6	3,7	4,7	4,2	4,6	4,8	4,4	4,8	5,2
48.	3,0	3,5	3,6	3,7	4,4	4,7	5,3	5,6	6,1	6,3	6,5	6,9	6,4	6,8	7,0
49.	3,6	4,1	4,7	4,5	4,9	5,2	6,0	6,5	7,1	6,8	7,2	7,9	7,4	7,8	8,5
50.	2,9	3,2	3,4	3,8	4,1	5,0	4,8	5,3	6,3	6,3	6,6	7,1	6,4	7,1	7,5
51.	3,3	3,7	4,0	3,9	4,6	5,2	5,4	6,2	6,6	6,3	7,1	7,5	7,4	7,7	7,8
52.	3,3	3,5	3,9	3,8	4,0	4,6	5,1	5,6	5,6	6,0	6,1	6,6	6,7	7,1	7,4
53.	3,1	3,6	3,9	3,7	4,3	4,9	5,0	5,4	5,9	5,7	6,7	6,6	6,2	6,2	7,2
54.	1,4	2,0	2,4	2,5	2,7	2,7	3,3	3,5	3,5	3,9	4,1	4,4	4,3	4,6	4,8
55.	2,9	3,3	3,3	3,4	4,1	4,3	4,3	5,5	5,8	5,7	6,1	6,9	6,2	6,3	6,9
56.	2,3	2,8	3,1	2,8	3,4	3,7	4,0	4,7	4,9	4,9	5,2	5,7	4,2	5,0	5,7
57.	1,6	2,4	2,7	2,4	2,6	3,4	3,3	3,8	4,1	4,0	4,1	4,7	4,4	4,5	4,8
58.	2,2	2,6	2,8	3,4	3,3	3,7	3,8	4,4	4,3	4,5	4,8	5,1	5,4	5,6	5,6
59.	2,3	2,1	2,4	2,6	2,7	2,7	3,5	3,9	3,9	4,0	4,3	4,2	4,9	5,0	4,9
60.	3,0	2,7	3,7	3,4	4,0	4,0	4,7	5,0	5,1	5,6	5,4	6,1	5,1	5,5	6,4

Задание № 4

Дана выборка курса биржевой стоимости акции некоторого предприятия за 12 месяцев.

1 Найти коэффициенты автокорреляции со смещением на 1,2,3 и 4 месяца.

2. Проверить найденные коэффициенты автокорреляции на значимость с доверительной вероятностью $p = 0{,}95$.

3. Построить коррелограмму.

4. Построить аддитивную модель временного ряда.

Вариант	Стоимость акции по месяцам (руб.)											
61.	52,7	52,1	53,4	57,3	56,1	56,2	61,3	60,9	60,5	65,4	65,6	65,6
62.	79	78,2	78,6	83,5	81	82,3	87,1	86,3	85,5	91,4	90,6	90,7
63.	74,4	73,2	74,3	79,9	78,7	79,7	84,1	84,3	85,4	89,3	89,6	91
64.	107	105	106	111	112	113	117	116	117	122	121	122
65.	84,1	82,6	83,8	87,5	87,3	88,1	93	92,3	93,6	98,4	97,2	97,1
66.	112	111	112	117	117	117	122	121	123	126	127	127
67.	32,8	30,3	30,8	35,7	34,1	34,2	37,5	35,8	35,7	39,1	38,8	37,3
68.	46,7	46,1	45,7	49,7	47,4	47,8	52	50,1	49,8	54,6	51,9	52,3
69.	13,3	12,5	12,7	17,2	15,9	16,1	20,5	19,2	19,9	23,9	22,8	23,5
70.	35,1	33	33,9	38,6	36,3	38	41,9	40	40,3	44,8	43,8	45,2

71.	19,2	18	18,9	24,4	23,2	23,1	27,9	28,8	28,2	34,8	33,2	33,3
72.	48,2	48,4	50,1	53,8	52,8	54,4	59,4	58,1	58,5	64,5	63,4	64,3
73.	27	25,4	25,6	31	28,9	28,2	34	32,2	32,3	36,9	34,3	33,6
74.	44,8	41,9	42,8	46,8	44,7	44,7	48,4	47,7	48,3	52,7	49,7	50,8
75.	22	20,4	21,6	25,6	22,9	24,3	27,3	26,7	26,7	30,9	28,9	28,9
76.	37,4	35,9	35,4	40,4	38,3	38,6	42,6	40,3	40,3	45,1	43,2	42,2
77.	53,4	52,8	52	57,3	54,9	54,9	60,4	59,9	60,4	63,6	63,2	63,3
78.	73,9	73,2	72,8	78	77,4	77,6	81,4	80,8	80,8	85,2	83,4	85,5
79.	73,2	72,8	73,4	79,6	77,9	78,4	84,1	82,5	84	89,9	88,6	88
80.	104	103	104	108	108	110	114	115	114	119	119	120

6. Критерии оценки расчетно-графической работы и типовые ошибки при ее выполнении.

Критерии оценки расчетно-графической работы:

оценка «зачтено» выставляется обучающемуся в том случае, если все задачи решены, к задачам приведены пояснения;

оценка «не зачтено» ставится в том случае, если какая-либо задача отсутствует или приведены недостаточные пояснения к решению задачи.

Программа дисциплины «Эконометрика» для обучающихся направления подготовки 38.03.01 «Экономика» предполагает выполнение расчетно-графической работы, в которой предложены 4 задания.

Типовые ошибки при выполнении расчетно-графической работы

При выполнении расчетно-графической работы по математике часто встречаются следующие ошибки:

1. Не соблюдены правила оформления расчетно-графической работы.
2. Не выдержана структура расчетно-графической работы (отсутствует библиографический список, теоретическая часть к задаче и т. д.).
3. Не указаны единицы измерения полученных результатов.
4. В задаче отсутствуют выводы или содержимое выводов к задаче неконструктивны.
5. Отсутствие готовности обучающегося отвечать на теоретические вопросы, являющиеся основой для решения задачи.
6. Не соблюдаются правила математического округления полученного результата.
7. Задание на расчетно-графическую работу выполнено не по своему варианту.

7. Рекомендуемая литература

а) основная литература

1. Кремер, Н. Ш. Эконометрика : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко. - М. : Юнити-Дана, 2005. - 311 с.

2. Практикум по эконометрике: учебное пособие / под ред. И. И. Елисеевой. - М. : Финансы и статистика, 2003. - 192 с.
3. Басовский Л. Е. Эконометрика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Л.Е. Басовский. - М.: РИОР, 2011. - 48 с. - Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=308169
4. Новиков А. И. Эконометрика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Новиков А. И. - М. : Дашков и К°, 2017. - 224 с. - Режим доступа: http://www.knigafund.ru/books/199322/read#page1

б) дополнительная литература

1. Грициан, В. Н. Эконометрика.: учебное пособие / В. Н. Грициан. - М.: Дашков и К, 2002. - 80 с.
2. Замков, О. О. Математические методы в экономике: учебник / О. О. Замков, А. В. - М. : 2009. – 365 с.
3. Просветов, Г. И. Математические методы и модели в экономике [Текст]: задачи и решения / Г. И. Просветов. - М. : Альфа-Пресс, 2008. - 343 с.
4. Тимофеев В. С. Эконометрика [Электронный ресурс]/ В. С. Тимофеев, А. В. Фаддеенков, В. Ю. Щеколдин. - Новосиб.: НГТУ, 2013. - 340 с. – Режим доступа: http://znanium.com/bookread2.php?book=546264

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для написания РГР

1. eLIBRARY.RU [Электронный ресурс] : электронная библиотека. – Режим доступа: http://elibrary.ru/defaultx.asp
2. Znanium.com [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система. – Режим доступа: http://znanium.com
3. «КнигаФонд» [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система. – Режим доступа : http://www.knigafund.ru
4. Электронный каталог Национальной библиотеки ЧР [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.nbchr.ru.
5. Издательство ЛАНЬ [Электронный ресурс] : электронно-библиотечная система. – Режим доступа : https://e.lanbook.com/

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

Кафедра «УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по дисциплине «ЭКОНОМЕТРИКА»

____

Наименование темы

Выполнил: студент __ курса
заочного отделения
по направлению 38.03.01
«Экономика»

____

Ф.И.О.

Научный руководитель:

____

должность, звание

____

Ф.И.О.

Оценка ____________________________

Дата «__» _______________ 2021г.

Чебоксары 2021