**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ЧЕБОКСАРСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)**
**МОСКОВСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Кафедра транспортно-технологических машин**

УТВЕРЖДАЮ
Директор филиала
________ А.В. Агафонов
«28» мая ______ 2021 г.
М. П.

# Теоретическая механика

(наименование дисциплины)

**Методические указания по выполнению**
**расчетно-графических работ**

| | |
|---|---|
| Направление подготовки | **15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств**<br>(код и наименование направления подготовки) |
| Квалификация выпускника | **бакалавр** |
| Типы задач профессиональной деятельности | **производственно-технологический**<br>**проектно-конструкторский** |
| Направленность (профиль) образовательной программы | **Технология машиностроения**<br>(наименование профиля подготовки) |
| Форма обучения | очная, заочная |

Чебоксары, 2021

Методические указания разработаны
в соответствии с требованиями ФГОС ВО
по направлению подготовки

**15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств**

Авторы:

Никулин Игорь Васильевич,
доцент, к.т.н. кафедры транспортно-технологических машин

*ФИО, ученая степень, ученое звание или должность, наименование кафедры*

Методические указания одобрены на заседании кафедры
транспортно-технологических машин

*наименование кафедры*

протокол № 10 от 15.05.2021_ года.

В соответствии с учебным планом и планами студентов направления подготовки 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» по теоретической механике выполняют расчетно-графическую работу (РГР). Она способствует приобретению навыков решения задач по основным разделам дисциплины и, как следствие лучшему освоению материала. Существенной помощью студентам при решении задач являются примеры решения аналогичных задач, основной целью которых является разъяснение хода решения, но не воспроизвести его полностью. При выполнении заданий все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно проделаны с необходимыми пояснениями. В конце решений должны быть даны ответы.

Методические указания по решению задач, входящих в РГР, даются для каждой задачи после ее текучести под рубрикой – «Указания».

## Содержание расчетно-графической работы

Работа включает по 1-2 задачи по каждому из трех разделов:
Задание 1 – Статика
Задание 2 – Кинематика
Задание 3 – Динамика

Количество задач задается преподавателем.

В каждой задаче дается 10 рисунков и таблица с тем же номером, что и задача, содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Нумерация рисунков двойная, при этом номером рисунка является цифра, стоящая после точки. Например, рис. С.1.4 – это рис. 4 к задаче С.1. Номера условий (варианта) от «0» до «9» указаны в 1-ом столбце таблицы.

Номер рисунка студент выбирает по предпоследней цифре шифра, а номер варианта в таблице – по последней. Например, если шифр оканчивается числом 25, то берут рис. 2, а вариант № 5 из таблицы.

Раздел Статика – задачи С1 и С2
Раздел Кинематика – задачи К2 и К3
Раздел Динамика – задачи Д1 и Д8

1. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики [Текст] : учебник для втузов / С. М. Тарг. - 12-е изд., стереотип. - М. : Высш. шк., 2001. - 416 с. : ил.
2. Мещерский, И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пос. / И.В. Мещерский; под ред. В.А. Пальмова. – СПб.: Лань; М.: Омега-Л, 2005.
3. Методические указания и контрольные задания по Теоретической механике. - Высшая школа, 1989.

# Задание 1 – СТАТИКА – задачи С1 и С2

## ЗАДАЧИ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАНИЯМ

### СТАТИКА

### Задача С1

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. С1.0 — С1.9, табл. С1), закреплена в точке $A$ шарнирно, а в точке $B$ прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке $C$ к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом $P = 25$ кН. На раму действуют пара сил с моментом $M = 100$ кН·м и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действует сила $\bar{F}_2$ под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке $D$, и сила $\bar{F}_3$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке $E$, и т. д.).

Определить реакции связей в точках $A$, $B$, вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0{,}5$ м.

**Указания.** Задача С1 — на равновесие тела под действием произвольной плоской системы сил. При ее решении учесть, что натяжения обеих ветвей нити, перекинутой через блок, когда трением пренебрегают, будут одинаковыми. Уравнение моментов будет более простым (содержать меньше неизвестных), если брать моменты относительно точки, где пересекаются линии действия двух реакций связей. При вычислении момента силы $\bar{F}$ часто удобно разложить ее на составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда $m_O(\bar{F}) = m_O(\bar{F}') + m_O(\bar{F}'')$.



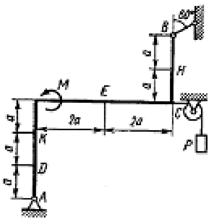


Рис. С1.0

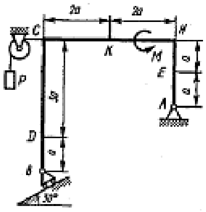


Рис. С1.1

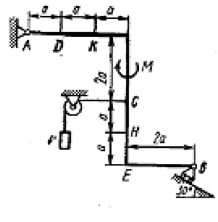


Рис. С1.2

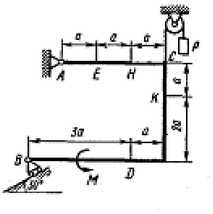


Рис. С1.3

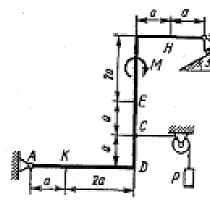


Рис. С1.4

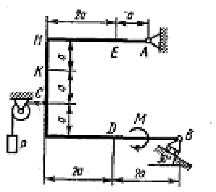


Рис. С1.5



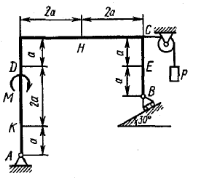


Рис. С1.6

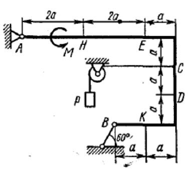


Рис. С1.7

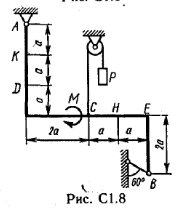


Рис. С1.8

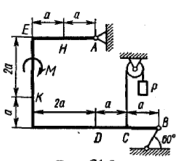
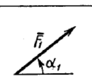
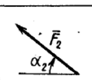
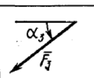
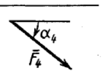


Рис. С1.9

Таблица С1

| Силы |  | |  | |  | |  | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $F_1 = 10$ кН | | $F_2 = 20$ кН | | $F_3 = 30$ кН | | $F_4 = 40$ кН | |
| Номер условия | Точка приложения | $\alpha_1$, град | Точка приложения | $\alpha_2$, град | Точка приложения | $\alpha_3$, град | Точка приложения | $\alpha_4$, град |
| 0 | $H$ | 30 | — | — | — | — | $K$ | 60 |
| 1 | — | — | $D$ | 15 | $E$ | 60 | — | — |
| 2 | $K$ | 75 | — | — | — | — | $E$ | 30 |
| 3 | — | — | $K$ | 60 | $H$ | 30 | — | — |
| 4 | $D$ | 30 | — | — | — | — | $E$ | 60 |
| 5 | — | — | $H$ | 30 | — | — | $D$ | 75 |
| 6 | $E$ | 60 | — | — | $K$ | 15 | — | — |
| 7 | — | — | $D$ | 60 | — | — | $H$ | 15 |
| 8 | $H$ | 60 | — | — | $D$ | 30 | — | — |
| 9 | — | — | $E$ | 75 | $K$ | 30 | — | — |



**Пример С1.** Жесткая пластина $ABCD$ (рис. С1) имеет в точке $A$ неподвижную шарнирную опору, а в точке $B$ — подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: $F = 25$ кН, $\alpha = 60°$, $P = 18$ кН, $\gamma = 75°$, $M = 50$ кН·м, $\beta = 30°$, $a = 0{,}5$ м. Определить: реакции в точках $A$ и $B$, вызываемые действующими нагрузками.

**Решение.** 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси $xy$ и изобразим действующие на пластину силы: силу $\bar{F}$, пару сил с моментом $M$, натяжение троса $\bar{T}$ (по модулю $T = P$) и реакции связей $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры $A$ изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы $\bar{F}$ относительно точки $A$ воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу $\bar{F}$ на составляющие $\bar{F}'$, $\bar{F}''$ ($F' = F\cos\alpha$, $F'' = F\sin\alpha$) и учтем, что $m_A(\bar{F}) = m_A(\bar{F}') + m_A(\bar{F}'')$. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_A + R_B\sin\beta - F\cos\alpha + T\sin\gamma = 0; \qquad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ Y_A + R_B\cos\beta + F\sin\alpha - T\cos\gamma = 0; \qquad (2)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0,\ M - R_B\cos\beta\cdot 4a + F\cos\alpha\cdot 2a - F\sin\alpha\cdot 3a - T\sin\gamma\cdot 2a = 0. \qquad (3)$$

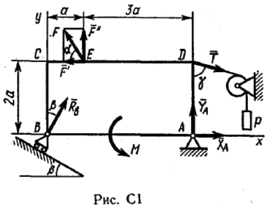


Рис. С1

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: $X_A = -8{,}5$ кН; $Y_A = -23{,}3$ кН; $R_B = 7{,}3$ кН. Знаки указывают, что силы $\bar{X}_A$ и $\bar{Y}_A$ направлены противоположно показанным на рис. С1.

## Задача С2

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке $C$ или соединены друг с другом шарнирно (рис. С2.0 — С2.5), или свободно опираются друг о друга (рис. С2.6 — С2.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке $A$ или шарнир, или жесткая заделка; в точке $B$ или гладкая плоскость (рис. 0 и 1), или невесомый стержень $BB'$ (рис. 2 и 3), или шарнир (рис. 4—9); в точке $D$ или невесомый стержень $DD'$ (рис. 0, 3, 8), или шарнирная опора на катках (рис. 7).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом $M = 60$ кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 20$ кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. С2; там же в столбце «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условиях № 1 на конструкцию действуют сила $\bar{F}_2$ под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке $L$, сила $\bar{F}_4$ под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке $E$, и нагрузка, распределенная на участке $CK$).

Определить реакции связей в точках $A$, $B$, $C$ (для рис. 0, 3, 7, 8 еще и в точке $D$), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0{,}2$ м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. С2а.

**Указания.** Задача С2 — на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

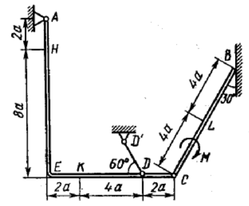


Рис. С2.0

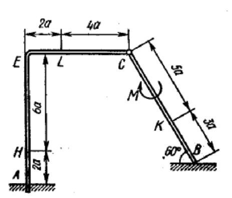


Рис. С2.1



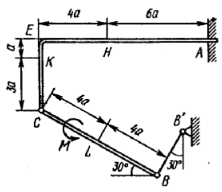


Рис. С2.2

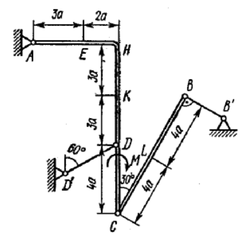


Рис. С2.3

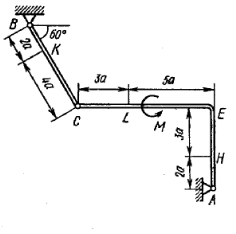


Рис. С2.4

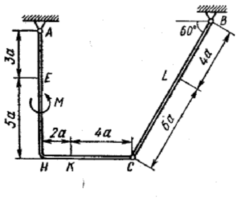


Рис. С2.5

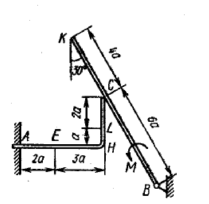


Рис. С2.6

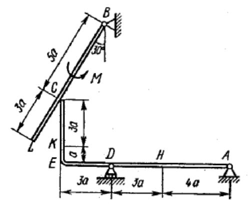


Рис. С2.7



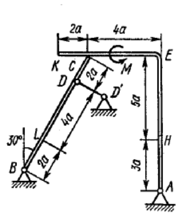


Рис. С2.8

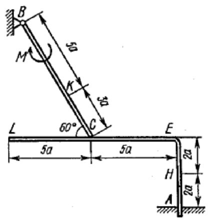


Рис. С2.9

Таблица С2

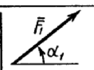
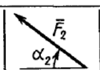
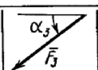
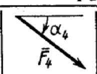
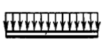
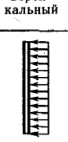
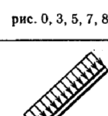
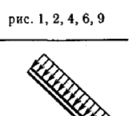
| Сила |  | |  | |  | |  | | Нагруженный участок |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $F_1 = 10$ кН | | $F_2 = 20$ кН | | $F_3 = 30$ кН | | $F_4 = 40$ кН | | |
| Номер условия | Точка приложения | $\alpha_1$, град | Точка приложения | $\alpha_2$, град | Точка приложения | $\alpha_3$, град | Точка приложения | $\alpha_4$, град | |
| 0 | $K$ | 60 | — | — | $H$ | 30 | — | — | $CL$ |
| 1 | — | — | $L$ | 60 | — | — | $E$ | 30 | $CK$ |
| 2 | $L$ | 15 | — | — | $K$ | 60 | — | — | $AE$ |
| 3 | — | — | $K$ | 30 | — | — | $H$ | 60 | $CL$ |
| 4 | $L$ | 30 | — | — | $E$ | 60 | — | — | $CK$ |
| 5 | — | — | $L$ | 75 | — | — | $K$ | 30 | $AE$ |
| 6 | $E$ | 60 | — | — | $K$ | 75 | — | — | $CL$ |
| 7 | — | — | $H$ | 60 | $L$ | 30 | — | — | $CK$ |
| 8 | — | — | $K$ | 30 | — | — | $E$ | 15 | $CL$ |
| 9 | $H$ | 30 | — | — | — | — | $L$ | 60 | $CK$ |

Таблица С2а

| Участок на угольнике | | Участок на стержне | |
|---|---|---|---|
| горизонтальный | вертикальный | рис. 0, 3, 5, 7, 8 | рис. 1, 2, 4, 6, 9 |
|  |  |  |  |



**Пример С2.** На угольник $ABC$ ($\angle ABC = 90°$), конец $A$ которого жестко заделан, в точке $C$ опирается стержень $DE$ (рис. С2, *а*). Стержень имеет в точке $D$ неподвижную шарнирную опору и к нему приложена сила $\bar{F}$, а к угольнику — равномерно распределенная на участке $KB$ нагрузка интенсивности $q$ и пара с моментом $M$.

Дано: $F = 10$ кН, $M = 5$ кН·м, $q = 20$ кН/м, $a = 0{,}2$ м. Определить: реакции в точках $A$, $C$, $D$, вызванные заданными нагрузками.

**Решение.** 1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня $DE$ (рис. С2, *б*). Проведем координатные оси $xy$ и изобразим действующие на стержень силы: силу $\bar{F}$, реакцию $\bar{N}$, направленную перпендикулярно стержню, и составляющие $\bar{X}_D$ и $\bar{Y}_D$ реакции шарнира $D$. Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_D + F - N\sin 60° = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ Y_D + N\cos 60° = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_D(\bar{F}_k) = 0,\ N\cdot 2a - F\cdot 5a\sin 60° = 0. \quad (3)$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. С2, *в*). На него действуют сила давления стержня $\bar{N}'$, направленная противоположно реакции $\bar{N}$, равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем силой $\bar{Q}$, приложенной в середине участка $KB$ (численно $Q = q\cdot 4a = 16$ кН), пара сил с моментом $M$ и реакция жесткой заделки, слагающаяся из силы, которую представим составляющими $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, и пары

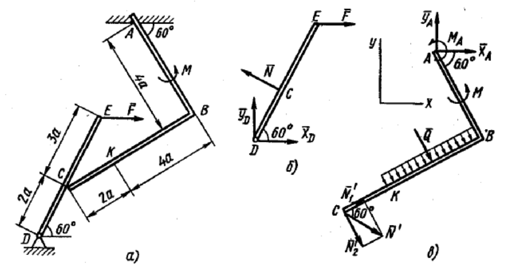


Рис. С2

с моментом $M_A$. Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,\ X_A + Q\cos 60° + N'\sin 60° = 0\,; \qquad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0,\ Y_A - Q\sin 60° - N'\cos 60° = 0\,; \qquad (5)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0,\ M_A + M + Q\cdot 2a + N'\cos 60°\cdot 4a + N'\sin 60°\cdot 6a = 0\,. \qquad (6)$$

При вычислении момента силы $\bar{N}'$ разлагаем ее на составляющие $\bar{N}'_1$ и $\bar{N}'_2$ и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (1)—(6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно $N' = N$ в силу равенства действия и противодействия.

Ответ: $N = 21{,}7$ кН, $Y_D = -10{,}8$ кН; $X_D = 8{,}8$ кН, $X_A = -26{,}8$ кН, $Y_A = 24{,}7$ кН, $M_A = -42{,}6$ кН · м.

Знаки указывают, что силы $\bar{Y}_D$, $\bar{X}_A$ и момент $M_A$ направлены противоположно показанным на рисунках.

# Задание 2 – КИНЕМАТИКА – задачи К2 и К3

## Задача К2

Механизм состоит из ступенчатых колес *1—3*, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки *4* и груза *5*, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес (рис. К2.0 — К2.9, табл. К2). Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса *1* — $r_1 = 2$ см, $R_1 = 4$ см, у колеса *2* — $r_2 = 6$ см, $R_2 = 8$ см, у колеса *3* — $r_3 = 12$ см, $R_3 = 16$ см. На ободьях колес расположены точки $A$, $B$ и $C$.

В столбце «Дано» таблицы указан закон движения или закон изменения скорости ведущего звена механизма, где $\varphi_1(t)$ — закон вращения колеса *1*, $s_4(t)$ — закон движения рейки *4*, $\omega_2(t)$ — закон изменения угловой скорости колеса *2*, $v_5(t)$ — закон изменения скорости груза *5* и т. д. (везде $\varphi$ выражено в радианах, $s$ — в сантиметрах, $t$ — в секундах). Положительное направление для $\varphi$ и $\omega$ против хода часовой стрелки, для $s_4$, $s_5$ и $v_4$, $v_5$ — вниз.

Определить в момент времени $t_1 = 2$ с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости ($v$ — линейные, $\omega$ — угловые) и ускорения ($a$ — линейные, $\varepsilon$ — угловые) соответствующих точек или тел ($v_5$ — скорость груза *5* и т. д.).

**Указания.** Задача К2 — на исследование вращательного движения

Таблица К2

| Номер условия | Дано | Найти | |
|---|---|---|---|
| | | скорости | ускорения |
| 0 | $s_4 = 4(7t - t^2)$ | $v_B,\ v_C$ | $\varepsilon_2,\ a_A,\ a_5$ |
| 1 | $v_5 = 2(t^2 - 3)$ | $v_A,\ v_C$ | $\varepsilon_3,\ a_B,\ a_4$ |
| 2 | $\varphi_1 = 2t^2 - 9$ | $v_4,\ \omega_2$ | $\varepsilon_2,\ a_C,\ a_5$ |
| 3 | $\omega_2 = 7t - 3t^2$ | $v_5,\ \omega_3$ | $\varepsilon_2,\ a_A,\ a_4$ |
| 4 | $\varphi_3 = 3t - t^2$ | $v_4,\ \omega_1$ | $\varepsilon_1,\ a_B,\ a_5$ |
| 5 | $\omega_1 = 5t - 2t^2$ | $v_5,\ v_B$ | $\varepsilon_2,\ a_C,\ a_4$ |
| 6 | $\dot{\varphi}_2 = 2(t^2 - 3t)$ | $v_4,\ \omega_1$ | $\varepsilon_1,\ a_C,\ a_5$ |
| 7 | $v_4 = 3t^2 - 8$ | $v_A,\ \omega_3$ | $\varepsilon_3,\ a_B,\ a_5$ |
| 8 | $s_5 = 2t^2 - 5t$ | $v_4,\ \omega_2$ | $\varepsilon_1,\ a_C,\ a_4$ |
| 9 | $\omega_3 = 8t - 3t^2$ | $v_5,\ v_B$ | $\varepsilon_2,\ a_A,\ a_4$ |



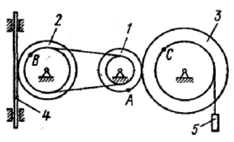


Рис. К2.0

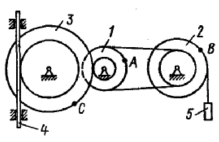


Рис. К2.1

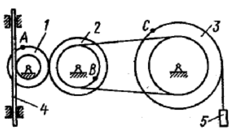


Рис. К2.2

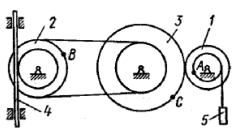


Рис. К2.3

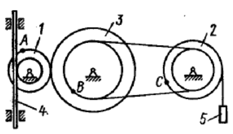


Рис. К2.4

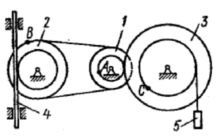


Рис. К2.5

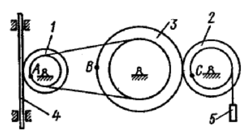


Рис. К2.6

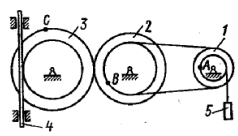


Рис. К2.7

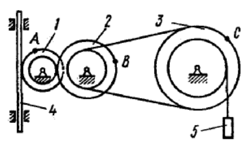


Рис. К2.8

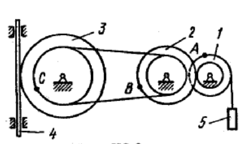


Рис. К2.9

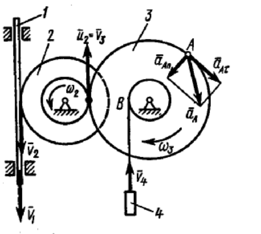


Рис. К2

твердого тела вокруг неподвижной оси. При решении задачи учесть, что, когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же, а когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колес, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

**Пример К2.** Рейка *1*, ступенчатое колесо *2* с радиусами $R_2$ и $r_2$ и колесо *3* радиуса $R_3$, скрепленное с валом радиуса $r_3$, находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом *4* на конце (рис. К2). Рейка движется по закону $s_1 = f(t)$.

Д а н о: $R_2 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 3$ см, $s_1 = 3t^3$ ($s$ — в сантиметрах, $t$ — в секундах), $A$ — точка обода колеса *3*, $t_1 = 3$ с. О п р е д е л и т ь: $\omega_3$, $v_4$, $\varepsilon_3$, $a_A$ в момент времени $t = t_1$.

**Решение.** Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса $R_i$), через $v_i$, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса $r_i$), — через $u_i$.

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени $t$. Зная закон движения рейки *1*, находим ее скорость:

$$v_1 = \dot{s}_1 = 9t^2 . \tag{1}$$

Так как рейка и колесо *2* находятся в зацеплении, то $v_2 = v_1$ или $\omega_2 R_2 = v_1$. Но колеса *2* и *3* тоже находятся в зацеплении, следовательно, $u_2 = v_3$ или $\omega_2 r_2 = \omega_3 R_3$. Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2 ,\ \omega_3 = \frac{r_2}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2 . \tag{2}$$

Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с получим $\omega_3 = 6{,}75\ с^{-1}$.

2. Определяем $v_4$. Так как $v_4 = v_B = \omega_3 r_3$, то при $t_1 = 3$ с $v_4 = 20{,}25$ см/с.

3. Определяем $\varepsilon_3$. Учитывая второе из равенств (2), получим $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1{,}5t$. Тогда при $t_1 = 3$ с $\varepsilon_3 = 4{,}5\ с^{-2}$.

4. Определяем $a_A$. Для точки $A$ $\bar{a}_A = \bar{a}_{A\tau} + \bar{a}_{An}$, где численно $a_{A\tau} = R_3\varepsilon_3$, $a_{An} = R_3\omega_3^2$. Тогда для момента времени $t_1 = 3$ с имеем

$$a_{A\tau} = 36\ см/с^2,\ a_{An} = 364{,}5\ см/с^2 ;$$

$$a_A = \sqrt{a_{A\tau}^2 + a_{An}^2} = 366{,}3\ см/с^2 .$$



Все скорости и ускорения точек, а также направления угловых скоростей показаны на рис. К2.

О т в е т: $\omega_3 = 6{,}75\ с^{-1}$; $v_4 = 20{,}25$ см/с; $\varepsilon_3 = 4{,}5\ с^{-2}$; $a_A = 366{,}3\ см/с^2$.

## Задача К3

Плоский механизм состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна $B$ или $E$ (рис. К3.0 — К3.7) или из стержней *1, 2, 3* и ползунов $B$ и $E$ (рис. К3.8, К3.9), соединенных друг с другом и с неподвижными опорами $O_1$, $O_2$ шарнирами; точка $D$ находится в середине стержня $AB$. Длины стержней равны соответственно $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $l_4 = 0{,}6$ м. Положение механизма определяется углами $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\varphi$, $\theta$. Значения этих углов и других заданных величин указаны в табл. К3а (для рис. 0—4) или в табл. К3б (для рис. 5—9); при этом в табл. К3а $\omega_1$ и $\omega_4$ — **величины постоянные.**

Определить величины, указанные в таблицах в столбцах «Найти».

Дуговые стрелки на рисунках показывают, как при построении чертежа механизма должны откладываться соответствующие углы: **по ходу или против хода часовой стрелки** (например, угол $\gamma$ на рис. 8 следует отложить от $DB$ по ходу часовой стрелки, а на рис. 9 — против хода часовой стрелки и т. д.).

Построение чертежа начинать со стержня, направление которого определяется углом $\alpha$; ползун с направляющими для большей наглядности изобразить так, как в примере К3 (см. рис. К3б).

Заданные угловую скорость и угловое ускорение считать направленными против часовой стрелки, а заданные скорость $\bar{v}_B$ и ускорение $a_B$ — от точки $B$ к $b$ (на рис. 5—9).

Т а б л и ц а К3а (к рис. К3.0 — К3.4)

| Номер условия | Углы, град | | | | | Дано | | Найти | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\varphi$ | $\theta$ | $\omega_1$, 1/с | $\omega_4$, 1/с | $v$ точек | $\omega$ звена | $a$ точки | $\varepsilon$ звена |
| 0 | 0 | 60 | 30 | 0 | 120 | 6 | — | $B$, $E$ | $DE$ | $B$ | $AB$ |
| 1 | 90 | 120 | 150 | 0 | 30 | — | 4 | $A$, $E$ | $AB$ | $A$ | $AB$ |
| 2 | 30 | 60 | 30 | 0 | 120 | 5 | — | $B$, $E$ | $AB$ | $B$ | $AB$ |
| 3 | 60 | 150 | 150 | 90 | 30 | — | 5 | $A$, $E$ | $DE$ | $A$ | $AB$ |
| 4 | 30 | 30 | 60 | 0 | 150 | 4 | — | $D$, $E$ | $AB$ | $B$ | $AB$ |
| 5 | 90 | 120 | 120 | 90 | 60 | — | 6 | $A$, $E$ | $AB$ | $A$ | $AB$ |
| 6 | 90 | 150 | 120 | 90 | 30 | 3 | — | $B$, $E$ | $DE$ | $B$ | $AB$ |
| 7 | 0 | 60 | 60 | 0 | 120 | — | 2 | $A$, $E$ | $DE$ | $A$ | $AB$ |
| 8 | 60 | 150 | 120 | 90 | 30 | 2 | — | $D$, $E$ | $AB$ | $B$ | $AB$ |
| 9 | 30 | 120 | 150 | 0 | 60 | — | 8 | $A$, $E$ | $DE$ | $A$ | $AB$ |



Т а б л и ц а К3б (к рис. К3.5 — К3.9)

| Номер условия | Углы, град | | | | | Дано | | | | Найти | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\varphi$ | $\theta$ | $\omega_1$, 1/с | $\varepsilon_1$, 1/с$^2$ | $v_B$, м/с | $a_B$, м/с$^2$ | $v$ точек | $\omega$ звена | $a$ точки | $\varepsilon$ звена |
| 0 | 120 | 30 | 30 | 90 | 150 | 2 | 4 | — | — | $B$, $E$ | $AB$ | $B$ | $AB$ |
| 1 | 0 | 60 | 90 | 0 | 120 | — | — | 4 | 6 | $A$, $E$ | $DE$ | $A$ | $AB$ |
| 2 | 60 | 150 | 30 | 90 | 30 | 3 | 5 | — | — | $B$, $E$ | $AB$ | $B$ | $AB$ |
| 3 | 0 | 150 | 30 | 0 | 60 | — | — | 6 | 8 | $A$, $E$ | $AB$ | $A$ | $AB$ |
| 4 | 30 | 120 | 120 | 0 | 60 | 4 | 6 | — | — | $B$, $E$ | $DE$ | $B$ | $AB$ |
| 5 | 90 | 120 | 90 | 90 | 60 | — | — | 8 | 10 | $D$, $E$ | $DE$ | $A$ | $AB$ |
| 6 | 0 | 150 | 90 | 0 | 120 | 5 | 8 | — | — | $B$, $E$ | $DE$ | $B$ | $AB$ |
| 7 | 30 | 120 | 30 | 0 | 60 | — | — | 2 | 5 | $A$, $E$ | $AB$ | $A$ | $AB$ |
| 8 | 90 | 120 | 120 | 90 | 150 | 6 | 10 | — | — | $B$, $E$ | $DE$ | $B$ | $AB$ |
| 9 | 60 | 60 | 60 | 90 | 30 | — | — | 5 | 4 | $D$, $E$ | $AB$ | $A$ | $AB$ |

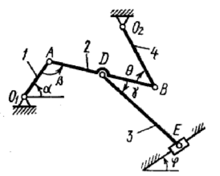


Рис. К3.0

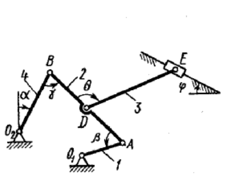


Рис. К3.1

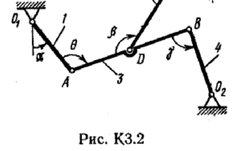


Рис. К3.2

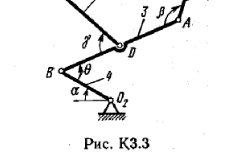


Рис. К3.3



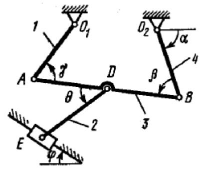


Рис. К3.4

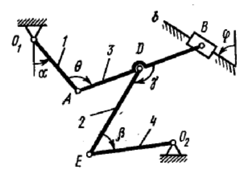


Рис. К3.5

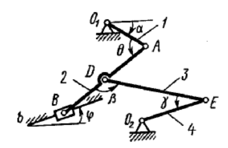


Рис. К3.6

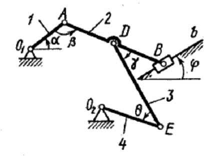


Рис. К3.7

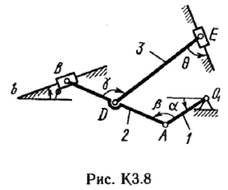


Рис. К3.8

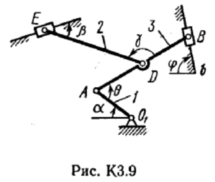


Рис. К3.9

**Указания.** Задача К3 — на исследование плоскопараллельного движения твердого тела. При ее решении для определения скоростей точек механизма и угловых скоростей его звеньев следует воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела и понятием о мгновенном центре скоростей, применяя эту теорему (или это понятие) **к каждому звену механизма в отдельности.**

При определении ускорений точек механизма исходить из векторного равенства $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^{n}$, где $A$ — точка, ускорение $\bar{a}_A$ которой или задано, или непосредственно определяется по условиям задачи (если точка $A$ движется по дуге окружности, то $\bar{a}_A = \bar{a}_A^{\tau} + \bar{a}_A^{n}$); $B$ — точка, ускорение $\bar{a}_B$ которой нужно определить (о случае, когда точка $B$

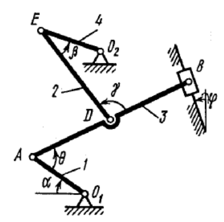


Рис. К3а

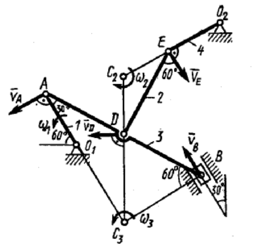


Рис. К3б

тоже движется по дуге окружности, см. примечание в конце рассмотренного ниже примера К3).

**Пример К3.** Механизм (рис. К3а) состоит из стержней *1, 2, 3, 4* и ползуна $B$, соединенных друг с другом и с неподвижными опорами $O_1$ и $O_2$ шарнирами.

Дано: $\alpha = 60°$, $\beta = 150°$, $\gamma = 90°$, $\varphi = 30°$, $\theta = 30°$, $AD = DB$, $l_1 = 0{,}4$ м, $l_2 = 1{,}2$ м, $l_3 = 1{,}4$ м, $\omega_1 = 2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 7$ с$^{-2}$ (направления $\omega_1$ и $\varepsilon_1$ — против хода часовой стрелки). Определить: $v_B$, $v_E$, $\omega_2$, $a_B$, $\varepsilon_3$.

**Решение.** 1. Строим положение механизма в соответствии с заданными углами (рис. К3б; на этом рисунке изображаем все векторы скоростей).

2. Определяем $v_B$. Точка $B$ принадлежит стержню $AB$. Чтобы найти $v_B$, надо знать скорость какой-нибудь другой точки этого стержня и направление $\bar v_B$. По данным задачи, учитывая направление $\omega_1$, можем определить $\bar v_A$; численно

$$v_A = \omega_1 l_1 = 0{,}8 \text{ м/с}; \quad \bar v_A \perp O_1A. \qquad (1)$$

Направление $\bar v_B$ найдем, учтя, что точка $B$ принадлежит одновременно ползуну, движущемуся вдоль направляющих поступательно. Теперь, зная $\bar v_A$ и направление $\bar v_B$, воспользуемся теоремой о проекциях скоростей двух точек тела (стержня $AB$) на прямую, соединяющую эти точки (прямая $AB$). Сначала по этой теореме устанавливаем, в какую сторону направлен вектор $\bar v_B$ (**проекции скоростей должны иметь одинаковые знаки**). Затем, вычисляя эти проекции, находим

$$v_B \cos 30° = v_A \cos 60° \text{ и } v_B = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (2)$$

3. Определяем $\bar v_E$. Точка $E$ принадлежит стержню $DE$. Следовательно, по аналогии с предыдущим, чтобы определить $\bar v_E$, надо сначала



найти скорость точки $D$, принадлежащей одновременно стержню $AB$. Для этого, зная $\bar v_A$ и $\bar v_B$, строим мгновенный центр скоростей (МЦС) стержня $AB$; это точка $C_3$, лежащая на пересечении перпендикуляров к $\bar v_A$ и $\bar v_B$, восставленных из точек $A$ и $B$ (к $\bar v_A$ перпендикулярен стержень *1*). По направлению вектора $\bar v_A$ определяем направление поворота стержня $AB$ вокруг МЦС $C_3$. Вектор $\bar v_D$ перпендикулярен отрезку $C_3D$, соединяющему точки $D$ и $C_3$, и направлен в сторону поворота. Величину $v_D$ найдем из пропорции

$$\frac{v_D}{C_3D} = \frac{v_B}{C_3B}. \qquad (3)$$

Чтобы вычислить $C_3D$ и $C_3B$, заметим, что $\Delta AC_3B$ — прямоугольный, так как острые углы в нем равны 30° и 60°, и что $C_3B = AB \sin 30° = 0{,}5AB = BD$. Тогда $\Delta BC_3D$ является равносторонним и $C_3B = C_3D$. В результате равенство (3) дает

$$v_D = v_B = 0{,}46 \text{ м/с}; \quad \bar v_D \perp C_3D. \qquad (4)$$

Так как точка $E$ принадлежит одновременно стержню $O_2E$, вращающемуся вокруг $O_2$, то $\bar v_E \perp O_2E$. Тогда, восставляя из точек $E$ и $D$ перпендикуляры к скоростям $\bar v_E$ и $\bar v_D$, построим МЦС $C_2$ стержня $DE$. По направлению вектора $\bar v_D$ определяем направление поворота стержня $DE$ вокруг центра $C_2$. Вектор $\bar v_E$ направлен в сторону поворота этого стержня. Из рис. К3б видно, что $\angle C_2ED = \angle C_2DE = 30°$, откуда $C_2E = C_2D$. Составив теперь пропорцию, найдем, что

$$\frac{v_E}{C_2E} = \frac{v_D}{C_2D}, \quad v_E = v_D = 0{,}46 \text{ м/с}. \qquad (5)$$

4. Определяем $\omega_2$. Так как МЦС стержня *2* известен (точка $C_2$) и $C_2D = l_2/(2\cos 30°) = 0{,}69$ м, то

$$\omega_2 = \frac{v_D}{C_2D} = 0{,}67 \text{ с}^{-1}. \qquad (6)$$

5. Определяем $\bar a_B$ (рис. К3в, на котором изображаем все векторы ускорений). Точка $B$ принадлежит стержню $AB$. Чтобы найти $\bar a_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки стержня $AB$ и траекторию точки $B$. По данным задачи можем определить $\bar a_A = \bar a_A^\tau + \bar a_A^n$, где численно

$$a_A^\tau = \varepsilon_1 l_1 = 2{,}8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^n = \omega_1^2 l_1 = 1{,}6 \text{ м/с}^2. \qquad (7)$$

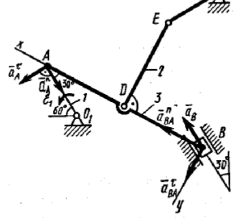


Рис. К3в



Вектор $\bar a_A^n$ направлен вдоль $AO_1$, а $\bar a_A^\tau$ — перпендикулярно $AO_1$; изображаем эти векторы на чертеже (см. рис. К3в). Так как точка $B$ одновременно принадлежит ползуну, то вектор $\bar a_B$ параллелен направляющим ползуна. Изображаем вектор $\bar a_B$ на чертеже, полагая, что он направлен в ту же сторону, что и $\bar v_B$.

Для определения $\bar a_B$ воспользуемся равенством

$$\bar a_B = \bar a_A^\tau + \bar a_A^n + \bar a_{BA}^\tau + \bar a_{BA}^n. \qquad (8)$$

Изображаем на чертеже векторы $\bar a_{BA}^n$ (вдоль $BA$ от $B$ к $A$) и $\bar a_{BA}^\tau$ (в любую сторону перпендикулярно $BA$); численно $a_{BA}^n = \omega_3^2 l_3$. Найдя $\omega_3$ с помощью построенного МЦС $C_3$ стержня *3*, получим

$$\omega_3 = \frac{v_A}{C_3A} = \frac{v_A}{l_3 \cos 30°} = 0{,}66 \text{ с}^{-1} \text{ и } a_{BA}^n = 0{,}61 \text{ м/с}^2. \qquad (9)$$

Таким образом, у величин, входящих в равенство (8), неизвестны только числовые значения $a_B$ и $a_{BA}^\tau$; их можно найти, спроектировав обе части равенства (8) на какие-нибудь две оси.

Чтобы определить $a_B$, спроектируем обе части равенства (8) на направление $BA$ (ось $x$), перпендикулярное неизвестному вектору $\bar a_{BA}^\tau$. Тогда получим

$$a_B \cos 30° = a_A^\tau \cos 60° - a_A^n \cos 30° + a_{BA}^n. \qquad (10)$$

Подставив в равенство (10) числовые значения всех величин из (7) и (9), найдем, что

$$a_B = 0{,}72 \text{ м/с}^2. \qquad (11)$$

Так как получилось $a_B > 0$, то, следовательно, вектор $\bar a_B$ направлен как показано на рис. К3в.

6. Определяем $\varepsilon_3$. Чтобы найти $\varepsilon_3$, сначала определим $a_{BA}^\tau$. Для этого обе части равенства (8) спроектируем на направление, перпендикулярное $AB$ (ось $y$). Тогда получим

$$-a_B \sin 30° = a_A^\tau \sin 60° + a_A^n \sin 30° + a_{BA}^\tau. \qquad (12)$$

Подставив в равенство (12) числовые значения всех величин из (11) и (7), найдем, что $a_{BA}^\tau = -3{,}58$ м/с$^2$. Знак указывает, что направление $\bar a_{BA}^\tau$ противоположно показанному на рис. К3в.

Теперь из равенства $a_{BA}^\tau = \varepsilon_3 l_3$ получим

$$\varepsilon_3 = \frac{|a_{BA}^\tau|}{l_3} = 2{,}56 \text{ с}^{-2}.$$

Ответ: $v_B = 0{,}46$ м/с; $v_E = 0{,}46$ м/с; $\omega_2 = 0{,}67$ с$^{-1}$; $a_B = 0{,}72$ м/с$^2$; $\varepsilon_3 = 2{,}56$ с$^{-2}$.

*Примечание.* Если точка $B$, ускорение которой определяется, движется не прямолинейно (например, как на рис. К3.0 — К3.4, где $B$ движется по окружности радиуса $O_2B$), то направление $\bar a_B$ заранее неизвестно.



В этом случае $\bar a_B$ также следует представить двумя составляющими ($\bar a_B = \bar a_B^\tau + \bar a_B^n$) и исходное уравнение (8) примет вид

$$\bar a_B^\tau + \bar a_B^n = \bar a_A^\tau + \bar a_A^n + \bar a_{BA}^\tau + \bar a_{BA}^n. \qquad (13)$$

При этом вектор $\bar a_B^n$ (см., например, рис. К3.0) будет направлен вдоль $BO_2$, а вектор $\bar a_B^\tau$ — перпендикулярно $BO_2$ в любую сторону. Числовые значения $a_A^\tau$, $a_A^n$ и $a_{BA}^n$ определяются так же, как в рассмотренном примере (в частности, по условиям задачи может быть $a_A^\tau = 0$ или $a_A^n = 0$, если точка $A$ движется прямолинейно).

Значение $a_B^n$ также вычисляется по формуле $a_B^n = v_B^2/\rho = v_B^2/l$, где $l$ — радиус окружности $O_2B$, а $v_B$ определяется так же, как скорость любой другой точки механизма.

После этого в равенстве (13) остаются неизвестными только значения $a_B^\tau$ и $a_{BA}^\tau$ и они, как и в рассмотренном примере, находятся проектированием обеих частей равенства (13) на две оси.

Найдя $a_B^\tau$, можем вычислить искомое ускорение $a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2}$. Величина $a_{BA}^\tau$ служит для нахождения $\varepsilon_{AB}$ (как в рассмотренном примере).

# Задание 3 – ДИНАМИКА – задачи Д1 и Д8

## ДИНАМИКА

### Задача Д1

Груз $D$ массой $m$, получив в точке $A$ начальную скорость $v_0$, движется в изогнутой трубе $ABC$, расположенной в вертикальной плоскости; участки трубы или оба наклонные, или один горизонтальный, а другой наклонный (рис. Д1.0 — Д1.9, табл. Д1).

На участке $AB$ на груз кроме силы тяжести действуют постоянная сила $\bar{Q}$ (ее направление показано на рисунках) и сила сопротивления среды $\bar{R}$, зависящая от скорости $\bar{v}$ груза (направлена против движения); трением груза о трубу на участке $AB$ пренебречь.

В точке $B$ груз, не изменяя своей скорости, переходит на участок $BC$ трубы, где на него кроме силы тяжести действуют сила трения (коэффициент трения груза о трубу $f = 0{,}2$) и переменная сила $\bar{F}$, проекция которой $F_x$ на ось $x$ задана в таблице.

Считая груз материальной точкой и зная расстояние $AB = l$ или



время $t_1$ движения груза от точки $A$ до точки $B$, найти закон движения груза на участке $BC$, т. е. $x = f(t)$, где $x = BD$.

**Указания.** Задача Д1 — на интегрирование дифференциальных уравнений движения точки (решение основной задачи динамики). Решение задачи разбивается на две части. Сначала нужно составить и проинтегрировать методом разделения переменных дифференциальное уравнение движения точки (груза) на участке $AB$, учтя начальные условия. Затем, зная время движения груза на участке $AB$ или длину этого участка, определить скорость груза в точке $B$. Эта скорость будет начальной для движения груза на участке $BC$. После этого нужно составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения груза на участке $BC$ тоже с учетом начальных условий, ведя отсчет времени от момента, когда груз находится в точке $B$, и полагая в этот момент $t = 0$. При интегрировании уравнения движения на участке $AB$ в случае, когда задана длина $l$ участка, целесообразно перейти к переменному $x$, учтя, что

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}.$$

Таблица Д1

| Номер условия | $m$, кг | $v_0$, м/с | $Q$, Н | $R$, Н | $l$, м | $t_1$, с | $F_x$, Н |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 20 | 6 | $0{,}4v$ | — | 2,5 | $2\sin(4t)$ |
| 1 | 2,4 | 12 | 6 | $0{,}8v^2$ | 1,5 | — | $6t$ |
| 2 | 4,5 | 24 | 9 | $0{,}5v$ | — | 3 | $3\sin(2t)$ |
| 3 | 6 | 14 | 22 | $0{,}6v^2$ | 5 | — | $-3\cos(2t)$ |
| 4 | 1,6 | 18 | 4 | $0{,}4v$ | — | 2 | $4\cos(4t)$ |
| 5 | 8 | 10 | 16 | $0{,}5v^2$ | 4 | — | $-6\sin(2t)$ |
| 6 | 1,8 | 24 | 5 | $0{,}3v$ | — | 2 | $9t^2$ |
| 7 | 4 | 12 | 12 | $0{,}8v^2$ | 2,5 | — | $-8\cos(4t)$ |
| 8 | 3 | 22 | 9 | $0{,}5v$ | — | 3 | $2\cos(2t)$ |
| 9 | 4,8 | 10 | 12 | $0{,}2v^2$ | 4 | — | $-6\sin(4t)$ |

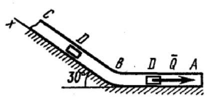


Рис. Д1.0

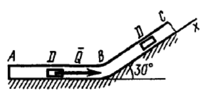


Рис. Д1.1



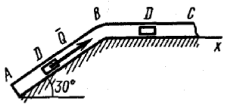


Рис. Д1.2

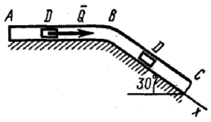


Рис. Д1.3

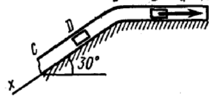


Рис. Д1.4

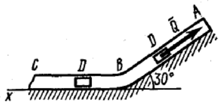


Рис. Д1.5

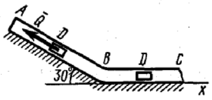


Рис. Д1.6

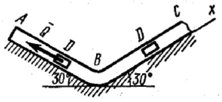


Рис. Д1.7

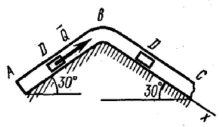


Рис. Д1.8

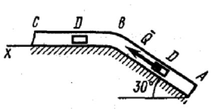


Рис. Д1.9



**Пример Д1.** На вертикальном участке $AB$ трубы (рис. Д1) на груз $D$ массой $m$ действуют сила тяжести и сила сопротивления $R$; расстояние от точки $A$, где $v = v_0$, до точки $B$ равно $l$. На наклонном участке $BC$ на груз действуют сила тяжести и переменная сила $F = F(t)$, заданная в ньютонах.

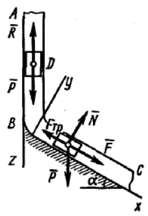


Рис. Д1

Д а н о: $m = 2$ кг, $R = \mu v^2$, где $\mu = 0{,}4$ кг/м, $v_0 = 5$ м/с, $l = 2{,}5$ м, $F_x = 16\sin(4t)$. О п р е д е л и т ь: $x = f(t)$ — закон движения груза на участке $BC$.

**Решение.** 1. Рассмотрим движение груза на участке $AB$, считая груз материальной точкой. Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P} = m\bar{g}$ и $\bar{R}$. Проводим ось $Az$ и составляем дифференциальное уравнение движения груза в проекции на эту ось:

$$m\frac{dv_z}{dt} = \Sigma F_{kz} \text{ или } mv_z\frac{dv_z}{dz} = P_z + R_z. \tag{1}$$

Далее находим $P_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu v^2$; подчеркиваем, что в уравнении **все переменные силы надо обязательно выразить через величины, от которых они зависят.** Учтя еще, что $v_z = v$, получим

$$mv\frac{dv}{dz} = mg - \mu v^2 \text{ или } v\frac{dv}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - v^2\right). \tag{2}$$

Введем для сокращения записей обозначения

$$k = \frac{\mu}{m} = 0{,}2 \text{ м}^{-1},\ n = \frac{mg}{\mu} = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2, \tag{3}$$

где при подсчете принято $g \approx 10$ м/с². Тогда уравнение (2) можно представить в виде

$$2v\cdot\frac{dv}{dz} = -2k(v^2 - n). \tag{4}$$

Разделяя в уравнении (4) переменные, а затем беря от обеих частей интегралы, получим

$$\frac{2v\,dv}{v^2 - n} = -2k\,dz \text{ и } \ln(v^2 - n) = -2kz + C_1. \tag{5}$$

По начальным условиям при $z = 0$ $v = v_0$, что дает $C_1 = \ln(v_0^2 - n)$ и из равенства (5) находим $\ln(v^2 - n) = -2kz + \ln(v_0^2 - n)$ или $\ln(v^2 - n) - \ln(v_0^2 - n) = -2kz$. Отсюда

$$\ln\frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = -2kz \text{ и } \frac{v^2 - n}{v_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

В результате находим

$$v^2 = n + (v_0^2 - n)e^{-2kz}\,. \qquad (6)$$

Полагая в равенстве (6) $z = l = 2{,}5$ м и заменяя $k$ и $n$ их значениями (3), определим скорость $v_B$ груза в точке $B$ ($v_0 = 5$ м/с, число $e = 2{,}7$):

$$v_B^2 = 50 - 25/e = 40{,}7 \text{ и } v_B = 6{,}4 \text{ м/с}\,. \qquad (7)$$

2. Рассмотрим теперь движение груза на участке $BC$; найденная скорость $v_B$ будет для движения на этом участке начальной скоростью ($v_0 = v_B$). Изображаем груз (в произвольном положении) и действующие на него силы $\bar{P} = m\bar{g}, \bar{N}, \bar{F}_{тр}$ и $\bar{F}$. Проведем из точки $B$ оси $Bx$ и $By$ и составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось $Bx$:

$$m\frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_{тр x} + F_x$$

или

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg\sin\alpha - F_{тр} + F_x\,, \qquad (8)$$

где $F_{тр} = fN$. Для определения $N$ составим уравнение в проекции на ось $By$. Так как $a_y = 0$, получим $0 = N - mg\cos\alpha$, откуда $N = mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{тр} = fmg\cos\alpha$; кроме того, $F_x = 16\sin(4t)$ и уравнение (8) примет вид

$$m\frac{dv_x}{dt} = mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) + 16\sin(4t)\,. \qquad (9)$$

Разделив обе части равенства на $m$, вычислим $g(\sin\alpha - f\cos\alpha) = g(\sin 30° - 0{,}2\cos 30°) = 3{,}2$; $16/m = 8$ и подставим эти значения в (9). Тогда получим

$$\frac{dv_x}{dt} = 3{,}2 + 8\sin(4t)\,. \qquad (10)$$

Умножая обе части уравнения (10) на $dt$ и интегрируя, найдем

$$v_x = 3{,}2t - 2\cos(4t) + C_2\,. \qquad (11)$$

Будем теперь отсчитывать время от момента, когда груз находится в точке $B$, считая в этот момент $t = 0$. Тогда при $t = 0$ $v = v_0 = v_B$, где $v_B$ дается равенством (7). Подставляя эти величины в (11), получим

$$C_2 = v_B + 2\cos 0 = 6{,}4 + 2 = 8{,}4\,.$$

При найденном значении $C_2$ уравнение (11) дает

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3{,}2t - 2\cos(4t) + 8{,}4\,. \qquad (12)$$



Умножая здесь обе части на $dt$ и снова интегрируя, найдем

$$x = 1{,}6t^2 - 0{,}5\sin(4t) + 8{,}4t + C_3\,. \qquad (13)$$

Так как при $t = 0$ $x = 0$, то $C_3 = 0$ и окончательно искомый закон движения груза будет

$$x = 1{,}6t^2 + 8{,}4t - 0{,}5\sin(4t)\,, \qquad (14)$$

где $x$ — в метрах, $t$ — в секундах.



Отсюда, так как $mg = P$, то

$$F_{тр} = F - M/R - 0{,}3P = 0{,}8P - 1{,}1P - 0{,}3P = -0{,}6P\,. \qquad (11)$$

Знак указывает, что сила $\bar{F}_{тр}$ направлена противоположно показанному на рисунке.

Подставляя значения $F_{тр}$ и $N$ из равенств (11) и (10) в неравенство (9), получим $0{,}6P \leqslant 1{,}27Pf$, откуда $f \geqslant 0{,}47$. Следовательно, наименьший коэффициент трения, при котором возможно качение барабана без скольжения $f_{min} = 0{,}47$.

## Задача Д8

Вертикальный вал $AK$ (рис. Д8.0 — Д8.9), вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ с$^{-1}$, закреплен подпятником в точке $A$ и цилиндрическим подшипником в точке, указанной в табл. Д8 в столбце 2 ($AB = BD = DE = EK = a$). К валу жестко прикреплены тонкий однородный ломаный стержень массой $m = 10$ кг, состоящий из частей *1* и *2* (размеры частей стержня показаны на рисунках, где $b = 0{,}1$ м, а их массы $m_1$ и $m_2$ пропорциональны длинам), и невесомый стержень длиной $l = 4b$ с точечной массой $m_3 = 3$ кг на конце; оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней указаны в таблице в столбцах 3 и 4, а углы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\varphi$ даны в столбцах 5—8.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника. При подсчетах принять $a = 0{,}6$ м.

**Указания.** Задача Д8 — на применение к изучению движения системы принципа Даламбера. При решении задачи учесть, что когда

Таблица Д8

| Номер условия | Подшипник в точке | Крепление в точке: ломаного стержня | Крепление в точке: невесомого стержня | $\alpha$, град | $\beta$, град: рис. 0—4 | $\gamma$, град: рис. 5—9 | $\varphi$, град |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 0 | *B* | *D* | *K* | 45 | 135 | 225 | 60 |
| 1 | *K* | *B* | *D* | 60 | 240 | 150 | 45 |
| 2 | *K* | *E* | *B* | 30 | 210 | 120 | 60 |
| 3 | *D* | *K* | *B* | 60 | 150 | 240 | 30 |
| 4 | *K* | *D* | *E* | 30 | 120 | 210 | 60 |
| 5 | *E* | *B* | *K* | 45 | 225 | 135 | 60 |
| 6 | *E* | *D* | *K* | 60 | 60 | 150 | 30 |
| 7 | *K* | *B* | *E* | 30 | 30 | 120 | 60 |
| 8 | *D* | *E* | *K* | 60 | 150 | 60 | 30 |
| 9 | *E* | *K* | *D* | 30 | 120 | 210 | 60 |



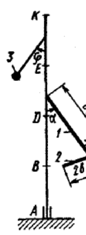


Рис. Д8.0

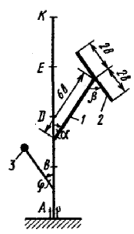


Рис. Д8.1

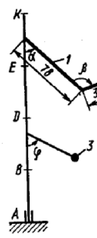


Рис. Д8.2

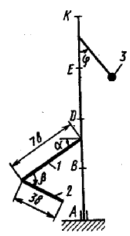


Рис. Д8.3

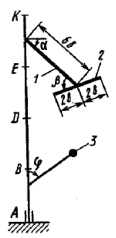


Рис. Д8.4

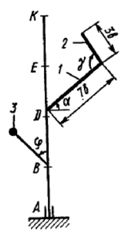


Рис. Д8.5

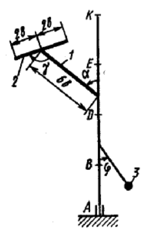


Рис. Д8.6

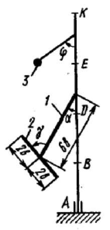


Рис. Д8.7

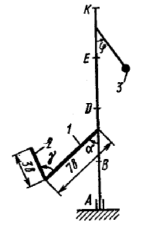


Рис. Д8.8

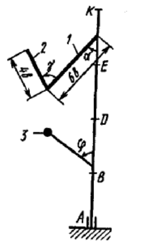


Рис. Д8.9

силы инерции частиц тела (в данной задаче стержня) имеют равнодействующую $\bar{R}^{и}$, то численно $R^{и} = ma_C$, где $a_C$ — ускорение центра масс $C$ тела, но линия действия силы $\bar{R}^{и}$ в общем случае не проходит через точку $C$ (см. пример Д8).

**Пример Д8.** Вертикальный вал длиной $3a(AB = BD = DE = a)$, закрепленный подпятником $A$ и подшипником $D$ (рис. Д8, *а*), вращается с постоянной угловой скоростью $\omega$. К валу жестко прикреплен в точке $E$ ломаный однородный стержень массой $m$ и длиной $10b$, состоящий из двух частей *1* и *2*, а в точке $B$ прикреплен невесомый стержень длиной $l = 5b$ с точечной массой $m_3$ на конце; оба стержня лежат в одной плоскости.

Дано: $\omega = 8$ с$^{-1}$, $m = m_1 + m_2 = 10$ кг, $m_3 = 2$ кг, $\alpha = 30°$, $\beta = 150°$, $\varphi = 60°$, $a = 0{,}3$ м, $b = 0{,}1$ м. Определить: реакции подпятника $A$ и подшипника $D$, пренебрегая весом вала.

**Решение.** 1. Изображаем (с учетом заданных углов) вал и прикрепленные к нему в точках $B$ и $E$ стержни (рис. Д8, *б*). Массы и веса частей *1* и *2* ломаного стержня пропорциональны длинам этих частей и соответственно равны $m_1 = 0{,}6m$; $m_2 = 0{,}4m$;

$$P_1 = 0{,}6mg\,;\ P_2 = 0{,}4mg\,;\ P_3 = m_3g\,. \tag{1}$$

2. Для определения искомых реакций рассмотрим движение заданной механической системы и применим принцип Даламбера. Проведем

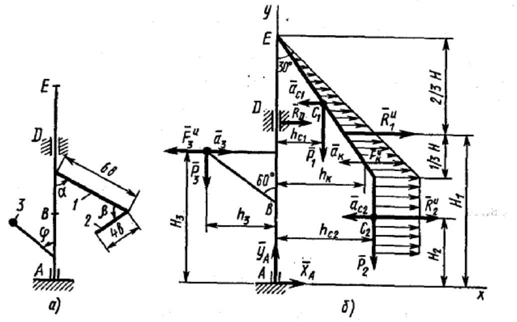


Рис. Д8



вращающиеся вместе с валом координатные оси $Axy$ так, чтобы стержни лежали в плоскости $xy$, и изобразим действующие на систему силы: активные силы — силы тяжести $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ и реакции связей — составляющие реакции подпятника $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и реакцию цилиндрического подшипника $\bar{R}_D$.

Согласно принципу Даламбера, присоединим к этим силам силы инерции элементов однородного ломаного стержня и груза, считая его материальной точкой.

Так как вал вращается равномерно, то элементы стержня имеют только нормальные ускорения $\bar{a}_{nk}$, направленные к оси вращения, а численно $a_{nk} = \omega^2 h_k$, где $h_k$ — расстояния элементов от оси вращения. Тогда силы инерции $\bar{F}_k^{и}$ будут направлены от оси вращения, а численно $F_k^{и} = \Delta m_k a_{kn} = \Delta m_k \omega^2 h_k$, где $\Delta m_k$ — масса элемента. Так как все $F_k^{и}$ пропорциональны $h_k$, то эпюры этих параллельных сил инерции стержня образуют для части *1* треугольник, а для части *2* — прямоугольник (рис. Д8, *б*).

Каждую из полученных систем параллельных сил инерции заменим ее равнодействующей, равной главному вектору этих сил. Так как модуль главного вектора сил инерции любого тела имеет значение $R^{и} = ma_C$, где $m$ — масса тела, $a_C$ — ускорение его центра масс, то для частей стержня соответственно получим

$$R_1^{и} = m_1 a_{C1},\ R_2^{и} = m_2 a_{C2}\,. \tag{2}$$

Сила инерции точечной массы *3* должна быть направлена в сторону, противоположную ее ускорению и численно будет равна

$$F_3^{и} = m_3 a_3\,. \tag{3}$$

Ускорения центров масс частей *1* и *2* стержня и груза *3* равны:

$$a_{C1} = \omega^2 h_{C1}\,,\ a_{C2} = \omega^2 h_{C2}\,,\ a_3 = \omega^2 h_3\,, \tag{4}$$

где $h_{C1}$, $h_{C2}$ — расстояния центров масс частей стержня от оси вращения, а $h_3$ — соответствующее расстояние груза:

$$\begin{aligned} h_{C1} &= 3b\sin 30° = 0{,}15 \text{ м}\,,\\ h_{C2} &= 6b\sin 30° = 0{,}3 \text{ м}\,,\\ h_3 &= l\sin 60° = 5b\sin 60° = 0{,}43 \text{ м}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставив в (2) и (3) значения (4) и учтя (5), получим числовые значения $R_1^{и}$, $R_2^{и}$ и $F_3^{и}$:

$$\begin{aligned} R_1^{и} &= 0{,}6m\omega^2 h_{C1} = 57{,}6 \text{ Н}\,,\\ R_2^{и} &= 0{,}4m\omega^2 h_{C2} = 76{,}8 \text{ Н}\,,\\ F_3^{и} &= m_3\omega^2 h_3 = 55{,}0 \text{ Н}\,. \end{aligned} \tag{6}$$

При этом линии действия равнодействующих $\bar{R}_1^{и}$ и $\bar{R}_2^{и}$ пройдут через центры тяжестей соответствующих эпюр сил инерции. Так, линия



действия $\bar{R}_1^{и}$ проходит на расстоянии $\frac{2}{3}H$ от вершины треугольника $E$, где $H = 6b\cos 30°$.

3. Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы (активные и реакции связей) и силы инерции образуют уравновешенную систему сил. Составим для этой плоской системы сил три уравнения равновесия. Получим

$$\begin{aligned} &\Sigma F_{kx} = 0\,;\ X_A + R_D + R_1^{и} + R_2^{и} - F_3^{и} = 0\,;\\ &\Sigma F_{ky} = 0\,;\ Y_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0\,;\\ &\Sigma m_A(\bar{F}_k) = 0\,;\ -R_D\cdot 2a - P_1h_{C1} - P_2h_{C2} + P_3h_3 -\\ &\qquad - R_1^{и}H_1 - R_2^{и}H_2 + F_3^{и}H_3 = 0\,, \end{aligned} \tag{7}$$

где $H_1$, $H_2$, $H_3$ — плечи сил $\bar{R}_1^{и}$, $\bar{R}_2^{и}$, $\bar{F}_3^{и}$ относительно точки $A$, равные (при подсчетах учтено, что $H = 6b\cos 30° = 0{,}52$ м)

$$\begin{aligned} H_1 = 3a - (2/3)H = 0{,}55 \text{ м},\quad H_2 = 3a - (H + 2b) = 0{,}18 \text{ м}\,,\\ H_3 = a + l\cos 60° = 0{,}55 \text{ м}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставив в уравнения (7) соответствующие величины из равенств (1), (5), (6), (8) и решив эту систему уравнений (7), найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = -33{,}7$ Н; $Y_A = 117{,}7$ Н; $R_D = -45{,}7$ Н.