

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Агафонов Александр Викторович  
Должность: директор филиала  
Дата подписания: 01.09.2023 10:50:11  
Уникальный программный ключ:  
2539477a8ecf706dc9cff164bc411eb6d3c4ab06

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"МОСКОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"  
Чебоксарский институт (филиал)



**МОСКОВСКИЙ  
ПОЛИТЕХ**

Чебоксарский институт

Кафедра строительного производства

## **ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

**Методическое указание для выполнения РГР по дисциплине  
«Вероятностные методы строительной механики и теории надежности  
строительных конструкций» для Строительство специальности 08.05.01  
уникальных зданий и сооружений, студентами очной форм обучения.**

Чебоксары 2023

УДК 624.13(07)  
П 30

Методическое указание к выполнению РГР по дисциплине «Вероятностные методы строительной механики и теории надежности строительных конструкций» /Сост. И.В. Петрова. – Чебоксары: ЧИ (Ф) МПУ, 2023. 29 с.

Методическое указание соответствуют государственным образовательным стандартам специальности 08.05.01. Строительство уникальных зданий и сооружений по специализации «Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений»

В методических указаниях изложена краткая теория и примеры решения задач с целью закрепления компетенций, полученных при изучении дисциплины «Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций».

Методическое указание предназначено для студентов специальности «Строительство уникальных зданий и сооружений» очной форм обучения.

# 1. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

## СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ.

### ПОНЯТИЕ НАДЕЖНОСТИ И ЕЕ СВОЙСТВА

Обычный детерминистический подход к расчету конструкций состоит из двух этапов:

1) Вычисляются напряжения, деформации и перемещения в конструкциях, подверженных действию внешних нагрузок. Эта задача решается методами строительной механики, теории упругости, теории пластичности и т.д.

2) Вычисленные величины сопоставляются с нормативно допустимыми значениями. При этом решается задача надежности, долговечности и экономичности конструкции.

Однако реальная система и ее условия эксплуатации отличаются от идеализированной системы и условий, рассматриваемых на стадии проектирования. Фактически напряжения, деформации и перемещения являются случайными величинами из-за случайного характера внешних воздействий, прочностных и др. внешних условий. Поэтому надежность конструкции может быть определена с привлечением методов математической и статистической теории вероятностей.

В теории вероятностей главная задача - зная состав генеральной совокупности, изучить распределения для состава случайной выборки. Это прямая задача теории вероятностей. Обратная задача - когда известен состав выборки и по нему требуется определить, какой была генеральная совокупность. Это обратная задача математической статистики. Или, точнее, в теории вероятностей мы, зная природу некоторого явления, выясняем, как будут вести себя (как распределены) те или иные изучаемые нами характеристики, которые можно

наблюдать в экспериментах. В математической статистике наоборот – исходными являются экспериментальные данные (обычно это наблюдения над случайными величинами), а требуется вынести то или иное суждение о природе рассматриваемого явления.

Надежность – свойство объекта сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять требуемые функции в заданных режимах и условиях применения, технического обслуживания, ремонта и транспортирования. Или надежность также – устойчивость качества по отношению ко всем возможным возмущениям. Надежность – количественный показатель (промежуток времени, число рабочих циклов, число километров и т.д.).

В зависимости от назначения системы и условий ее эксплуатации надежность включает свойства: 1) безотказность; 2) долговечность; 3) ремонтпригодность; 4) сохраняемость и любые их сочетания.

Безотказность – вероятность безотказной работы конструкции за определенный промежуток времени.

Долговечность – вероятный промежуток времени безотказной работы конструкции.

Ремонтпригодность – вероятность того, что неисправная система может быть восстановлена за заданное время.

Содержание теории надежности – разработка методов оценки надежности систем и создание систем, обладающих заданными показателями надежности и долговечности.

Задачи расчета на надежность состоят в определении вероятности выхода конструкции из строя в заданных условиях, нахождении по заданной экономически целесообразной надежности требуемых размеров конструкции, допустимых нагрузок или оптимального срока эксплуатации, а также оценки надежности системы по имеющимся оценкам надежности составляющих ее элементов. В задачу теории надежности строительных конструкций входит также обоснование процедур

нормирования расчетных характеристик. Специфика теории надежности строительных конструкций состоит в необходимости учета случайных свойств нагрузок и воздействий на сооружения, а также учета совместного действия случайных нагрузок на систему со случайными прочностными характеристиками.

Основное понятие теории надежности – отказ – событие, состоящее в нарушении работоспособности системы. Понятие отказа близко по смыслу к понятию предельного состояния. К предельным состояниям 1-й группы относятся: общая потеря устойчивости формы, потеря устойчивости положения, любое разрушение, переход в изменяемую систему, качественное изменение конфигурации; состояния, при которых возникает необходимость прекращения эксплуатации в результате текучести материала, сдвига в соединениях, ползучести или чрезмерного раскрытия трещин. Предельные состояния 2-й группы – недопустимые деформации конструкций в результате прогиба, поворота или осадок, характеризующихся разностью вертикальных перемещений узлов, отнесенных к расстоянию между ними, креном сооружения в целом, относительным прогибом или выгибом, кривизной элемента, относительным углом закручивания, горизонтальным или вертикальным смещением элемента или сооружения в целом, углом перекоса или поворота. К предельным состояниям 2-й группы относятся также недопустимые колебания конструкции, изменение положения, образование или раскрытие трещин.

Примеры отказов - обрушения, опрокидывания, потеря устойчивости, хрупкое разрушение, большие деформации и прогибы, механический или коррозионный износ, растрескивание и т.д.

Отказы вызваны влиянием случайных факторов, поэтому они носят случайный характер. За показатель (меру) надежности системы может быть принята вероятность  $P$  безотказной работы в течение всего срока службы  $T$ .

Недостатки теории надежности - сложно получить опытные данные в количестве, достаточном для

последующей их обработки методами теории вероятностей. Сложно длительный срок проводить испытания конструкции для получения надежных выводов о ее долговременной работе.

## 2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ВАЖНЫЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Событие - качественный или количественный результат опыта, осуществляемого при определенных условиях. Например, событие - попадание предела текучести стали  $R_u$  в интервал от 240 до 260 МПа. Событие может быть случайным, достоверным или невозможным. Объективная математическая оценка возможности реализации случайного события - вероятность. Вероятность есть объективная мера возможности наступления события независимо от того, является ли оно массовым или нет. В жизни все (полуинтуитивно) применяют вероятностные оценки будущим событиям и весьма успешно.

Частота события  $A$  (статистическая вероятность).

$$P^*(A) = m/n,$$

где  $m$ - число опытов, в которых наблюдается событие  $A$ ;

$n$  - общее число опытов.

Значения  $P^*(A)$  - случайны.

$$P^*(A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A),$$

где  $P(A)$  - математическая вероятность, являющаяся достоверной величиной, т.е. вероятность того, что при  $n \rightarrow \infty$

$P^*(A) = P(A)$  равна 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

При  $m = n$  вероятность  $P(A) = 1$ , при  $m = 0$  соответственно

$$P(A) = 0.$$

События несовместны в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе. (Например, появление цифр от 1 до 6 на игральном кубике).

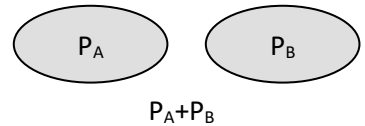
Случайные события совместны, если при данном испытании могут произойти два эти события.

Если события А и В несовместны, то вероятность появления или события А или события В:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad (1)$$

или в общем виде

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad (2).$$

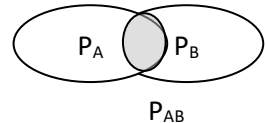


### Сумма вероятностей двух противоположных

#### событий

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (3).$$

Событие А независимо от В, если вероятность появления события А не зависит от того, произошло событие В или нет.



Если события А и В независимы (они совместны), то вероятность появления и события А и события В равна:

$$P(AB) = P(A)P(B) \quad P\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i) \quad (4).$$

В урне два кубика – черный и белый и два шарика – черный и белый. Вероятность появления черного кубика равна произведению вероятностей появления черного цвета и кубика, т.е.  $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ .

Из формулы (4) видно, например, что если событие А (появление максимальной ветровой нагрузки) и событие В

(появление максимальной снеговой нагрузки) – независимы, то вероятность одновременного появления А и В (т.е. максимумов нагрузок) меньше вероятности появления одного из событий (максимумов нагрузки) ( $P_{\text{снег+ветер}}^{\text{max}} = P_{\text{снег}}^{\text{max}} \cdot P_{\text{ветер}}^{\text{max}}$ ).

Это учитывается коэффициентом сочетаний  $\psi$ .

Вероятность  $P(AB)$  тем меньше, чем меньше  $P(A)$  и  $P(B)$ .

Формула (4) иллюстрируется последовательным соединением. Вероятность неразрушения последовательной системы:

$$P = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \quad (5)$$

где  $P(A_i)$ ,  $i = 1, 3$  – вероятности неразрушения  $i$ -го элемента системы,

$A_i$  – событие, состоящее в неразрушении  $i$ -го элемента системы.

Пример последовательного соединения: статически определимая система т.к. разрушение всей системы происходит при разрушении хотя бы одного из элементов, т.о. вероятность неразрушения всей системы меньше вероятности неразрушения любого ее отдельного элемента.

Формула (4) также иллюстрируется и параллельным соединением.

Вероятность разрушения параллельной системы:

$$\bar{P} = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3), \quad (6)$$

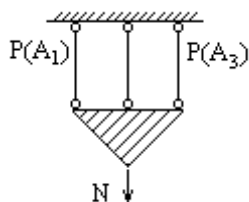
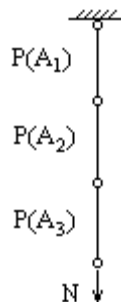
где  $P(\bar{A}_i), i = 1..3$  – вероятности разрушения  $i$ -го элемента системы.

Вероятность неразрушения параллельной системы:

$$P = 1 - \bar{P} = 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)) \quad (7)$$

$$\text{или в общем виде: } P = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i)) \quad (8).$$

Пример параллельного соединения: статически неопределимая система т.к. разрушение всей системы





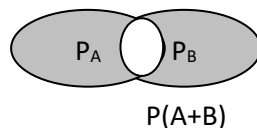
происходит при разрушении всех избыточных и еще одной связей. Т. о. вероятность не разрушения всей системы больше вероятности не разрушения любого ее отдельного элемента. Однако в действительности в статически неопределимой системе вероятности разрушения элементов системы не независимы, т.к. разрушение одного элемента из-за перераспределения усилий приводит к изменению вероятностей разрушения остальных элементов.

Например, при диаграмме Прандтля «условное» разрушение одного элемента статически неопределимой системы (т.е. напряжение в этом элементе при увеличении  $N$  остается постоянным и равным  $R_y$ ) в меньшей степени приводит к перераспределению усилий, а, следовательно, и к изменению вероятностей разрушения. Т. о. статически неопределимая система со стержнями, работающими по диаграмме Прандтля, больше подходит в качестве примера для параллельной системы.

Если случайные события  $A$  и  $B$  совместны (и независимы), то вероятность появления или  $A$  или  $B$ :

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \quad (9),$$

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \prod_{i=1}^n P(A_i) \quad (10).$$



Если случайные события  $A$  и  $B$  зависимы (и совместны) и вероятности их появления  $P(A)$  и  $P(B)$ , то вероятность совмещения событий  $A$  и  $B$  (произойдет и  $A$  и  $B$ ):

$$P(AB) = P(A)P(B/A) \quad (11),$$

где  $P(B/A)$  – условная вероятность, т.е. вероятность появления события  $B$ , при условии, что событие  $A$  произошло. Аналогично

$$P(AB) = P(B)P(A/B) \quad (12).$$

Например, в урне два черных и два белых шара. Событие  $A$  – появление белого шара с первого раза, событие  $B$  – появление белого шара со второго раза. Вероятность

появления белого шара два раза подряд определяется формулой:

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=1/2 \cdot 1/3=1/6.$$

Из формул (11) и (12) можно получить:

$$P(A/B) = P(A) \frac{P(B/A)}{P(B)} \quad (13),$$

где  $P(A)$  – априорная вероятность появления события  $A$ , определенная до того как стала известна информация о событии  $B$ .

$P(A/B)$  – апостериорная вероятность появления события  $A$ , основанная на этой информации.  $A$  и  $B$  произошли, но мы определяем вероятность того, что перед  $B$  было  $A$ .

Если  $A$  и  $B$  независимы, то  $P(A/B) = P(A)$  и наоборот.

Пусть имеется  $n$  несовместных событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  с вероятностями их появления  $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$  и пусть  $P(B/A_1), P(B/A_2), \dots, P(B/A_n)$  – условные вероятности осуществления события  $B$  с одним из  $n$  событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . (Т.е. события  $B$  и  $A_1$ ,  $B$  и  $A_2, \dots$ ,  $B$  и  $A_n$  – зависимы и совместны). Тогда вероятность осуществления события  $B$ :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B/A_i) \quad (14)$$

**Это формула полной вероятности,**

где  $P(A_i)P(B/A_i)$  - вероятность того, что произойдет  $B$  и  $A_i$ ;

$P(B)$  – по другому – вероятность того, что  $B$  произойдет с любым из  $A_i$ .

Пусть событие  $B$  произошло, это изменит вероятности  $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$ . Надо найти условные вероятности  $P(A_1/B), P(A_2/B), \dots, P(A_n/B)$  осуществления события  $A_i$ ,  $i=1, \dots, n$  при условии, что  $B$  произошло (т.е. если  $B$  произошло, то надо найти вероятность того, что ему предшествовало появление именно события  $A_i$ ).

Формула полной вероятности Байеса (из (13) и (14)):

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)P(B / A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B / A_j)} \quad (15),$$

где  $P(A_i)$  – вероятность появления события  $A_i$  до того как произошло  $B$ ;

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

( $P(A_i / B)$  – как бы является удельным весом вероятности  $P(A_i)$  в сумме всех вероятностей  $P(A_j)$ ,  $j = 1, n$ ).

### Пример 1.

Имеются две партии закладных деталей для железобетонных конструкций, причем известно, что в одной партии все детали удовлетворяют техническим условиям, а в другой партии 1/4 деталей недоброкачественные. Закладная деталь, взятая из наудачу выбранной партии, оказалась доброкачественной. Определить вероятность того, что вторая деталь из этой же партии окажется недоброкачественной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.

Решение. Пусть событие  $A$  – первая деталь доброкачественная. Гипотеза:  $H_1$  – взята партия, содержащая недоброкачественные детали;  $H_2$  – взята партия доброкачественных деталей. По условию задачи

$$P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A/H_1) = \frac{3}{4}, \quad P(A/H_2) = 1$$

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{7}{8}.$$

После первого испытания вероятность того, что партия содержит недоброкачественные детали:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 3/4}{7/8} = \frac{3}{7}.$$

Вероятность того, что партия содержит только доброкачественные детали:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{1/2 \cdot 1}{7/8} = \frac{4}{7}.$$

Пусть событие В состоит в том, что при втором испытании деталь оказалась недоброкачественной. Вероятность данного события также находится по формуле полной вероятности. Если  $P_1$  и  $P_2$  - вероятности гипотез  $H_1$  и  $H_2$  после испытания, то, согласно предыдущим

вычислениям,  $P_1 = \frac{3}{7}$ ,  $P_2 = \frac{4}{7}$ .

Кроме того,  $P(B/H_1) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B/H_2) = 0$ .

Поэтому искомая вероятность  $P(B) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{7} \cdot 0 = 0,107$ .

Пусть производится  $n$  независимых опытов, имеющих два возможных исхода – появление и непоявление события А (вероятность появления  $p$ , непоявления  $q = 1 - p$ ). Вероятность того, что при  $n$  испытаниях событие А наступает  $m$  раз вычисляется по **формуле Бернулли**

$$P_n^m(A) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (16),$$

где  $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-[m-1])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$  - число

сочетаний из  $m$  элементов в  $n$ .

Вероятность  $P_n^1(A)$  того, что в результате  $n$  независимых опытов событие  $A$  произойдет хотя бы один раз (может и больше):  $P_n(A) = 1 - q^n$ ,

где  $q$  - вероятность неоявления события  $A$  в первом испытании;

$q^n$  - вероятность того, что  $A$  не произойдет ни разу;

$1 - q^n$  - вероятность того, что  $A$  произойдет один раз, или два раза или все  $n$  раз.

**Пример 2.** Событие  $A$  - разрушение здания в сейсмическом районе,  $p = 0,1$  - вероятность разрушения его в течение первого года. Тогда  $q=1-p$  - вероятность неразрушения в течение первого. Тогда

$P_2(A)=1-0.9^2=0.19$ ,  $P_3(A)=1-0.9^3=0.271$ ,  $P_{10}(A)=1-0.9^{10}=0.651$ ,  $P_{20}(A)=1-0.9^{20}=0.878$ ,  $P_{50}(A)=1-0.9^{50}=0.995$ , где  $P_n(A)$  – вероятности разрушения здания за  $n$  лет.

Т.о. функция надежности (зависимость вероятности неразрушения от пройденного количества лет) от значения 1 асимптотически приближается к  $OX$ .

### 3. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

Случайная величина (СВ) - это изменчивая величина, которая может принимать то или иное значение в зависимости от степени воздействия на нее случайных

факторов. Численное значение случайной величины предсказать трудно. Тем не менее практически важно знать, какое из возможных численных значений и с какой вероятностью может принять случайная величина в результате случайного события. Случайные величины могут быть дискретными (прерывными) и непрерывными.

Примеры дискретных случайных величин:

- число циклов повторной нагрузки до разрушения конструкции;

- число дефектных изделий (панелей) в партии;

- число станков, требующих наладки.

ДСВ считается известной, если известны принимаемые ею значения и вероятности. Для ДСВ распределение вероятностей представляет собой совокупность вероятностей случайных событий, заключающихся в том, что СВ принимает одно из возможных значений.

Формула для распределения вероятностей ДСВ в общем случае имеет вид:

$$P_i = P(X = x_i), \quad (17)$$

где  $X$  — случайная дискретная величина,

$x_i$  — возможные значения ДСВ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Правая часть равенства (17) означает вероятность того, что ДСВ примет значение  $x$ . Закон распределения ДСВ согласно (17) записывается в виде таблицы (табл. 1).

Таблица 1. Распределение случайной дискретной величины

$x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$P_i$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	...	$P_n$

Сумма  $P_i$ , как сумма вероятностей группы несовместимых событий должна быть равна единице:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 1$$

**Пример 3.** Завод изготавливает железобетонные панели. Если из большой партии отобрать три изделия, то возможные значения дефектных панелей в случайной выборке будут равны 0, 1,2,3. На основе наблюдений и измерений установлены вероятности попаданий дефектных изделий в случайную выборку (табл. 2).

Таблица 2. Вероятность изготовления дефектной панели

$\xi$	1	2	3	4
$X_i$	0	1	2	3
$P_i$	0,754	0,219	0,026	0,001

Примечание.  $x_i$ - число дефектных плит в случайной выборке,  $P_i$  - вероятность попадания дефектных изделий в выборку.

Рассмотренные четыре вероятности образуют распределение вероятностей ДСВ — числа дефектных плит в случайной выборке.

Контроль:

$$\sum_{i=1}^n P_i = 0,754 + 0,219 + 0,026 + 0,001 = 1$$

Анализируя данные табл. 17.2 и учитывая статистический характер вероятности, можно предполагать, что при большом количестве выборок по три плиты каждая, согласно закону больших чисел, примерно 75 % выборок не будут иметь ни одного дефектного изделия, 22 %—одно, 3 %—два и 0,1 %—все три, т.е. в последнем случае в одной из тысячи выборок все три изделия окажутся дефектными.

Данные о вероятностях и значениях ДСВ из табл. 2 можно представить в виде графика (рис. 1).

Иногда вершины отрезков, определяющих величину вероятностей, соединяют ломаной линией, которую часто называют многоугольником распределения.

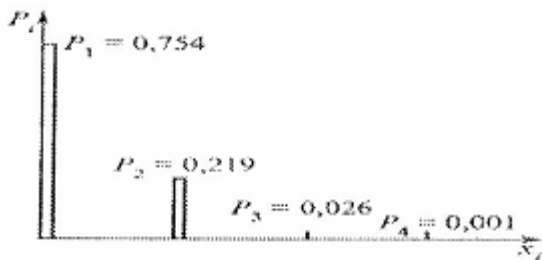


Рис.1. Вероятность попадания дефектных железобетонных панелей в случайную выборку.

Таким образом, закон распределения ДСВ может быть задан аналитически (17), в виде таблицы или графически.

Непрерывная случайная величина (НСВ) принимает любые значения из непрерывного числового множества в промежутке между предельными значениями. Эти значения могут быть целыми и дробными. Очевидно, число возможных значений непрерывной величины будет бесконечно.

Примеры непрерывных случайных величин.

1) Предел текучести стали изменяется в пределах от ( $\sigma_y^{\min} = 210$  МПа до  $\sigma_y^{\max} = 360$  МПа. Случайные значения предела текучести будут находиться в промежутке между этими значениями  $\sigma_y = 210...360$  МПа. Количество значений предела текучести в указанных пределах будет бесконечно.

2) Срок службы деревянных конструкций складов минеральных удобрений колеблется в пределах  $T = 30..50$  лет.

3) Прочность бетона на сжатие класса В30 может изменяться в пределах  $R = 28...50$  МПа.

4) Прогибы изгибаемых элементов могут отличаться от средних значений на 15...20%.

5) Ширина раскрытия трещин в железобетонных конструкциях

может изменяться в пределах  $a_{\text{крс}} = 0,01 ...0,4$  мм.

Для количественной характеристики распределения вероятностей удобно пользоваться не вероятностью события при некотором значении текущей переменной  $x$ , а



вероятностью события того, что случайная величина будет меньше этого значения текущей переменной. С этой целью вводится функция распределения случайной величины.

Функцией распределения  $F(x)$  называется функция, определяющая вероятность того, что случайная величина  $X$  в результате испытаний примет значение меньше  $x$ :

$$F(x) = P(X < x),$$

где  $x$  — текущая переменная.

Функция распределения является самой универсальной характеристикой как для ДСВ, так и для НСВ. Функция распределения полностью характеризует случайную величину с вероятностной точки зрения, т.е. является одной из форм закона распределения. Функцию распределения иногда называют интегральной функцией распределения. Она может иметь конечные и бесконечные пределы (рис. 2)

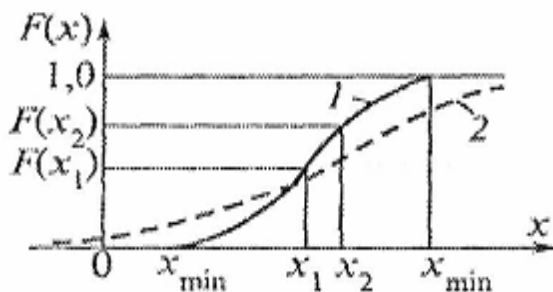


Рис. 2. Функция распределения непрерывной случайной величины: 1 — при ограниченных значениях случайной величины; 2 — при неограниченных значениях случайной величины.

Общие свойства интегральной функции распределения

1. Функция  $F(x)$  есть неубывающая функция своего аргумента:

$$F(x_2) > F(x_1) \text{ при } x_2 > x_1,$$

2. Интегральная функция распределения изменяется в пределах от 0 до 1.

3. Если возможные значения случайной величины конечны (см. рис. 2, кривая 1), то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq x_{\min},$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x \geq x_{\max}.$$

Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены по всей оси  $x$  (см. рис. 2, кривая 2), то справедливы следующие предельные соотношения:

$$F(x) = 0 \text{ при } x = -\infty$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x = \infty$$

НСВ можно задать, используя другую функцию, которую называют плотностью распределения, или плотностью вероятности (иногда ее называют дифференциальной функцией).

Плотностью распределения НСВ называют первую производную от интегральной функции распределения:

$$f(x) = F'(x)$$

Дифференциальную функцию распределения НСВ удобно представить в графической форме (рис. 3).

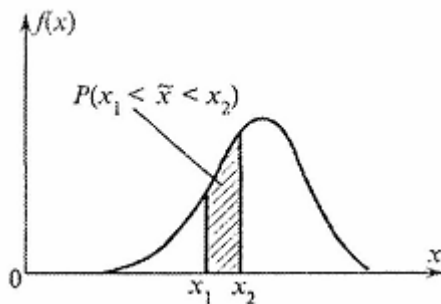


Рис. 3. Плотность распределения непрерывной случайной величины.

Основные свойства плотности распределения

1. Плотность распределения есть неотрицательная функция:

$$f(x) \geq 0$$

Это свойство вытекает непосредственно из того, что интегральная функция распределения есть неубывающая функция. Геометрически это свойство означает, что точки,

принадлежащие графику плотности распределения, расположены над осью ОХ.

2. Интеграл от плотности распределения в пределах изменения НСВ равен единице:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f(x) dx = 1, x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$$

Это означает, что событие достоверно и его вероятность равна единице. Геометрически это означает, что вся площадь, ограниченная осью ОХ и кривой распределения, равна единице.

Функция  $F(x)$ , как и всякая вероятность, величина безразмерная. Размерность плотности распределения  $f(x)$  обратна размерности случайной величины.

Вероятность попадания НСВ в интервал равна определенному интегралу:

$$P(x_1 < \tilde{x} < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Геометрически вероятность попадания случайной величины  $X$  на участок  $X_1 \dots X_2$  равна заштрихованной площади, ограниченной кривой плотностью распределения в пределах данного участка и осью абсцисс (см. рис. 3).

Вероятность попадания НСВ в определенный интервал можно вычислить также с помощью интегральной функции распределения:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

где  $F(x_1)$  и  $F(x_2)$  - значение интегральной функции распределения на границах интервала.

Математическое ожидание с.в.  $X$ :

- дискретной:

$$M(x) = \sum_{i=1}^m x_i p_i \quad (18)$$

При этом  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$  ( $M(x)$  - случайна при  $n \neq \infty$ ).

- непрерывной

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx, \quad (19).$$

Математическое ожидание  $\bar{X}$  - достоверная величина, т.к. вероятность того, что при  $n \rightarrow \infty$  испытаниях мы получим среднее арифметическое  $M(X) = \bar{X}$  равна 1.

$M(c) = c$ ,  $M(cx) = cM(x)$ , где  $c$  – неслучайное число.

Для независимых с.в.  $X_1$  и  $X_2$

$$M(x_1 + x_2) = M(x_1) + M(x_2),$$

$$M(x_1 x_2) = M(x_1)M(x_2),$$

$$M(x^2) = [M(x)]^2 + D(x).$$

К математическому ожиданию стремится среднее арифметическое наблюдаемых значений с.в. при количестве испытаний  $n \rightarrow \infty$ . Геометрически м.о. – это абсцисса ц. т. площади под кривой плотности распределения. Размерность м.о. совпадает с размерностью с.в.

Дисперсия с.в.  $X$  - м.о. квадрата отклонения с.в.  $X$  от ее м.о. (центра распределения):

$$D(x) = M[x - M(x)]^2 = M(x^2) - M^2(x), \quad (20)$$

$$\text{т.к.} \quad M[x - M(x)]^2 = M[x^2 - 2xM(x) + M^2(x)] = M(x^2) -$$

$$2M^2(x) + M^2(x),$$

$$M[2xM(x)] = 2M^2(x) \text{ и } M[M(x)] = M(x).$$

Дисперсия дискретной с.в.  $X$

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^2 p_i \quad (21)$$

Дисперсия непрерывной с.в.  $X$ :

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - \bar{x}^2 \quad (22)$$

$D(x) = M[(x - \bar{X})^2]$ , при  $\bar{X} = 0$   $D(x) = M(\bar{X}^2)$ ,  $\bar{X}$  - математическое ожидание.

Дисперсия характеризует разброс с.в. вокруг ее среднего значения (математического ожидания).

$$D(c) = 0,$$

$$D(cx) = c^2 D(x),$$

$$D(c+x) = D(x).$$

Доказательство.

$$D(cx) = M[cx - M(cx)]^2 = M[c^2 x^2 - 2cxM(cx) + M^2(cx)] =$$

$$c^2 M(x^2) - M[2c^2 x M(x)] + M[c^2 M^2(x)] =$$

$$c^2 M(x^2) - 2c^2 M^2(x) + c^2 M^2(x) =$$

$$c^2 [M(x^2) - M^2(x)] = c^2 D(x). \quad D(c+x) =$$

$$M[c+x - M(c+x)]^2 = M[c+x-c-M(x)]^2 = M[x-M(x)]^2 = D(x).$$

$$\text{Для независимых с.в. } X_1 \text{ и } X_2 \quad D(x_1 \pm x_2) = D(x_1) + D(x_2).$$

Геометрически дисперсия – это центральный момент инерции площади под кривой плотности распределения.

Размерность дисперсии - квадрат размерности с.в.

Среднеквадратическое отклонение (стандарт): .

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} \quad (23)$$

Асимметрия непрерывной с.в.  $X$ :

$$A(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^3 p(x) dx \quad (24).$$

Если с.в.  $X$  распределена симметрично относительно своего м.о., то  $A(x) = 0$ .

Коэффициент изменчивости (вариации) с.в.  $X$  - отношение стандарта к м.о.:

$$V(x) = \sigma(x) / \bar{X} < 1 \quad (25).$$

**Пример 4.** Определение статистических характеристик прочности бетона.

По полученной в результате 100 испытаний образцов бетона на прочность при сжатии случайной выборке (табл. 3) построить статистический ряд распределения прочности, гистограмму плотности распределения прочности, гистограмму функции распределения и определить математическое ожидание (марочную прочность), дисперсию, стандарт, коэффициент вариации, класс бетона (нормативную кубиковую прочность).

Таблица 3. Случайная выборка 100испытаний образцов бетона на прочность при сжатии

23,70	22,60	21,60	24,40	22,00	25,60	20,10	25,30	26,70	22,40
21,70	23,70	23,30	22,80	18,20	23,60	22,50	24,00	19,60	21,60
22,60	22,30	24,60	20,70	22,90	20,00	24,40	23,80	25,30	24,70
24,10	21,70	23,10	23,80	23,00	24,70	24,60	21,30	22,80	23,70
21,90	22,10	21,40	19,90	22,40	22,80	22,30	23,40	23,70	24,80
19,80	26,90	24,50	22,70	22,10	23,30	20,10	24,00	22,80	21,40
22,00	20,90	22,00	24,70	22,60	24,30	24,30	21,90	20,50	21,00
23,50	21,00	22,30	21,40	21,40	23,00	23,30	22,00	24,90	21,50
24,80	22,10	21,40	22,10	23,70	22,70	23,40	24,00	23,60	23,50
21,50	22,90	21,60	21,50	21,70	21,80	18,80	23,20	22,30	24,50

Построим статистический ряд распределения прочности (табл. 4). В первой строке таблицы записываем разряды в порядке их расположения вдоль оси абсцисс (принимаям десять одинаковых разрядов); во второй строке — количество попаданий  $m_i$  значений случайной величины в данный интервал; в третьей — соответствующие частоты  $p_i$ .

Таблица 4 Статистический ряд распределения прочности бетона при сжатии

$I_i$	18,20; 19,07	19,07; 19,94	19,94; 20,81	20,81; 21,68	21,68; 22,55	22,55; 23,42	23,42; 24,29	24,29; 25,16	25,16; 26,03	26,03; 26,90
$m_i$	2	3	5	15	21	20	14	14	4	2
$p_i$	0,02	0,03	0,05	0,15	0,21	0,2	0,14	0,14	0,04	0,02

Построим гистограмму плотности распределения (рис. 4) и гистограмму функции распределения (рис. 5).

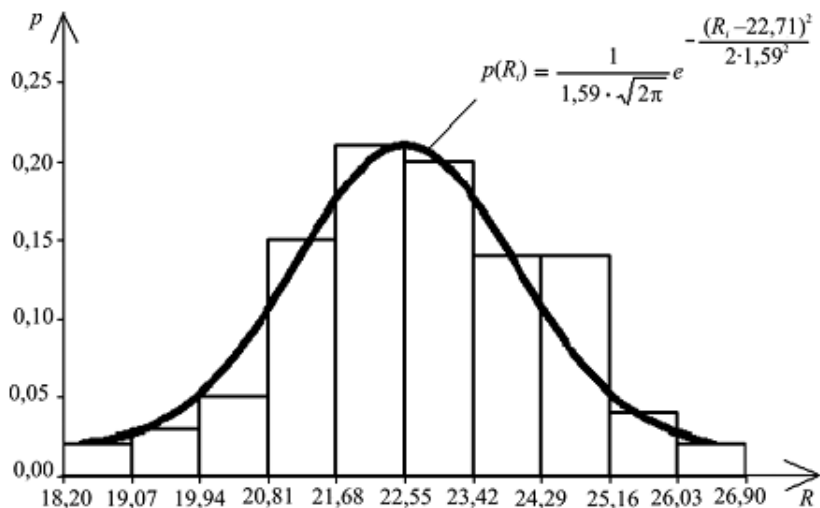


Рис.4

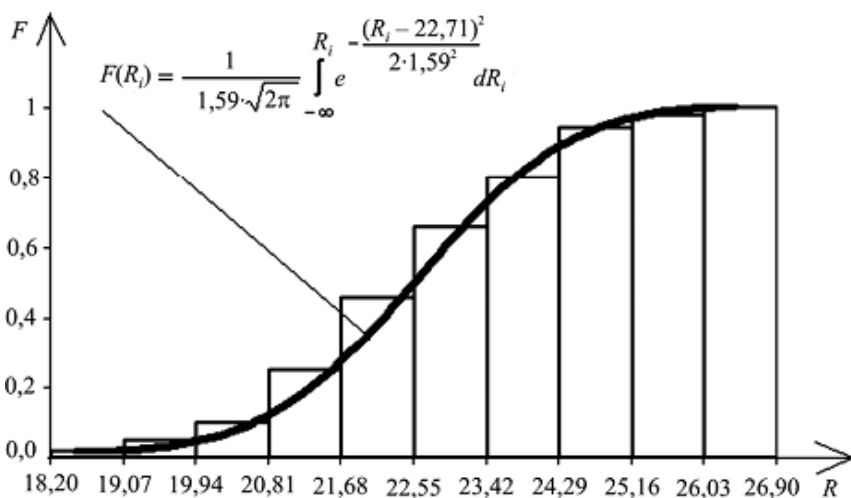


Рис.5.

Определяем математическое ожидание (марочную прочность) по формуле :

$$M[R] = \bar{R} = \sum R_i p_i,$$

где  $R_i$  — среднее значение прочности на каждом интервале, равное

$$R_i = \frac{R_i^{\text{НАЧ}} + R_i^{\text{КОН}}}{2}.$$

$$M[R] = 18,635 \cdot 0,02 + 19,505 \cdot 0,03 + 20,375 \cdot 0,05 + 21,245 \cdot 0,15 + \\ + 22,115 \cdot 0,21 + 22,985 \cdot 0,2 + 23,855 \cdot 0,14 + 24,725 \cdot 0,14 + 25,595 \cdot 0,04 + \\ + 26,465 \cdot 0,02 = 22,71 \text{ МПа}.$$

Определим дисперсию по формуле:

$$D[R] = \sum_i (R_i - \bar{R})^2 p_i = (18,635 - 22,71)^2 \cdot 0,02 + \\ + (19,505 - 22,71)^2 \cdot 0,03 + (20,375 - 22,71)^2 \cdot 0,05 + \\ + (21,245 - 22,71)^2 \cdot 0,15 + (22,115 - 22,71)^2 \cdot 0,21 + \\ + (22,985 - 22,71)^2 \cdot 0,2 + (23,855 - 22,71)^2 \cdot 0,14 + \\ + (24,725 - 22,71)^2 \cdot 0,14 + (25,595 - 22,71)^2 \cdot 0,04 + \\ + (26,465 - 22,71)^2 \cdot 0,02 = 2,54 \text{ МПа}^2.$$

Определяем среднеквадратическое отклонение по формуле:

$$\sigma[R] = \sqrt{D[R]} = 1,59 \text{ МПа}.$$

Покажем на гистограммах кривые плотности распределения и интегральной функции распределения (см. рис. 4 и 5).

Определяем коэффициент вариации прочности бетона:

$$f[R] = \frac{\sigma[R]}{M[R]} = 0,07.$$

Зная марочную прочность бетона и коэффициент вариации, определим класс бетона:

$$B = \bar{R} \cdot (1 - 1,64 \cdot f[R]).$$

$$B = 22,71 \cdot (1 - 1,64 \cdot 0,07) = 20,1.$$



## Решение в среде Mathcad

$\text{ORIGIN} := 1$                        $N := 100$                        $n := 10^4$   
 $X := \text{morn}(N, 22.7, 1.6)$   
 $\bar{m} := \text{mean}(X) = 22.459$        $\bar{s} := \text{stdev}(X) = 1.563$        $h1 := \frac{s}{2.5} = 0.625$

$$X^T =$$

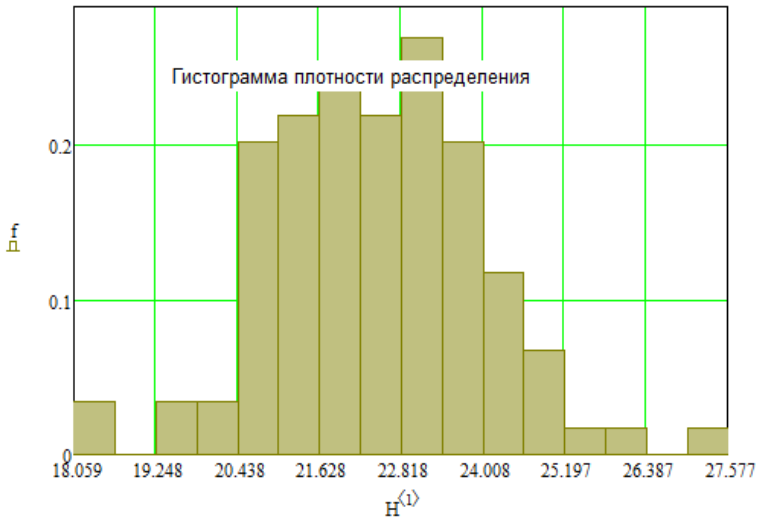
	1	2	3	4	5	6	7
1	21.998	21.613	21.943	21.178	20.003	22.77	...

$\bar{l} := \min(X) = 18.059$        $\bar{u} := \max(X) = 27.577$        $\bar{R} := \bar{u} - \bar{l} = 9.518$        $n := \text{ceil}\left(\frac{\bar{R}}{h1}\right) = 16$   
 $h := \frac{\bar{R}}{n} = 0.595$        $\bar{H} := \text{histogram}(n, X)$

$$H^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	18.356	18.951	19.546	20.141	20.736	21.331	...

$p := \frac{H^{(2)}}{N}$                        $f := \frac{p}{h}$                        $\max(f) = 0.269$        $\min(f) = 0$                        $\sum_{i=1}^n p_i = 1$



Исходный массив  $X$  образован выборкой (объемом  $N = 100$ ) нормально распределенных случайных чисел с параметрами  $m = 22.7$ ,  $\sigma = 1.6$ . Размах (ширина) выборки обозначен через  $R$ . Число разрядов (промежутков), равно 16.

Для выделения целой части  $n$  использована встроенная функция  $\text{ceil}$  (выводит наименьшее целое, большее или равное значению ее аргумента).

Функция  $\text{histogram}$  формирует первый столбец (середины промежутков), второй – абсолютные частоты попаданий значений случайной величины  $X$  в равные промежутки, число которых равно  $n$ .

$$i := 1..n \quad F_{\text{cum}} := \sum_{j=1}^i p_j$$



$$M := \frac{\sum_{k=1}^n (H^{(1)})_k}{n} = 22.818$$

$$D := \sum_{k=1}^n \left[ \left[ (H^{(1)})_k - M \right]^2 \cdot p_k \right] = 2.502 \quad \sigma := \sqrt{D} = 1.582$$

$$f_r := \frac{\sigma}{M} = 0.069 \quad \text{- коэффициент вариации прочности}$$

$$B := M \cdot (1 - 1.64 \cdot f_r) = 20.224 \quad \text{- класс бетона по прочности}$$

## Литература

1. Чирков В.П. «Прикладные методы теории надежности в расчетах строительных конструкций». М.Маршрут 2006г. 620с.
2. Шумилов К. А.,Козлова Е. М. Вероятностные методы в строительной механике: / учебное пособие / К. А. Шумилов; СПбГАСУ. – СПб., 2015. – с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1989.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Учеб. пособие для вузов. Изд. 7-е, стер. – М.: Высш. школа, 1999.-479с .

## Оглавление

1. ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ. ПОНЯТИЕ НАДЕЖНОСТИ И ЕЕ СВОЙСТВА	3
2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, ВАЖНЫЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ	6
3. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.	14
4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ	20
5. ЛИТЕРАТУРА	27

Петрова Ирина Владимировна

Методическое указание для выполнения РГР по дисциплине  
«Вероятностные методы строительной механики и теории надежности  
строительных конструкций » для специальности 08.05.01 Строительство  
уникальных зданий и сооружений, студентами очной обучения.